ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $6^{ης}$ ἑβδομάδας

38. Ἔστω $S = \{a/(2^{\mu}3^{\nu}) \,:\, a \in \mathbb{Z},\ \mu,\nu \in \mathbb{N}_0\}$.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ S εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ $\mathbb{Q}$ καὶ τὸ $\mathbb{Z}$ εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ S.
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $S^* = \{2^m3^n \,:\, m,n \in \mathbb{Z}\}$.

39. Ἔστω δακτύλιος R. Ἀποδεῖξτε ὅτι στὸν R ἰσχύει ἡ ταυτότητα $(a+b)^2 = a^2 + 2a\cdot b + b^2$ (“ταυτότητα” σημαίνει ὅτι ἡ σχέση ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ $a, b \in R$) ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ R εἶναι μεταθετικὸς δακτύλιος.

40. Ἔστω R δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σύνολο τῶν μονάδων (= αντιστρέψιμων στοιχείων) R^* εἶναι κλειστὸ ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ τὸ ἀντίστροφο, δηλαδή: Ἂν $r_1, r_2 \in R^*$, τότε $r_1r_2 \in R^*$ καὶ ἂν $r \in R^*$, τότε $r^{-1} \in R^*$. Παρατηρῆστε ὅτι, βάσει τοῦ πρώτου, ἂν $r \in R^*$ καὶ $n \in \mathbb{N}_0$, τότε $r^n \in \mathbb{R}^*$.

41. Ἔστω ὅτι ὁ ἀκέραιος $d > 1$ δὲν εἶναι τετράγωνο ἀκεραίου. Ἀπὸ ἄσκηση τῆς προηγούμενης ἑβδομάδας ξέρομε ὅτι τὸ $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d}\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ εἶναι δακτύλιος (ὑποδακτύλιος τοῦ R ἐν προκειμένῳ).
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $\epsilon = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^*$, τότε ὅλες οἱ δυνάμεις ϵ^n, $n \in \mathbb{Z}$, εἶναι διαφορετικές.
Ὑπόδειξη: Χρησιμοποιεῖστε τὴν προηγούμενη ἄσκηση. Ἐπίσης, θὰ παίξει ρόλο τὸ ὅτι $d > 1$, ὁπότε $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{R}$.
(β′) Παρατηρῆστε ὅτι, ἂν $x = a$, $y = b$ εἶναι ἀκέραια λύση τῆς ἐξίσωσης $x^2 - dy^2 = 1$ ἢ τῆς ἐξίσωσης $x^2 - dy^2 = -1$, τότε τὸ $a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ εἶναι μονάδα τοῦ δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
(γ′) Παρατηρῆστε ὅτι $2 + \sqrt{5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]^*$ καὶ ὑπολογῖστε τὸ $(2 + \sqrt{5})^3$. Εἶναι αὐτὸ μονάδα τοῦ $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$;
(δ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $S_1 = \{5a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ καὶ $S_1^* = \emptyset$.
(ε′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $S_2 = \{3a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ δὲν εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

42. Τὸ *κέντρο* $C(R)$ ἑνὸς δακτυλίου R ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: $C(R) = \{a \in R : a\cdot r = r\cdot a\ \forall r \in R\}$. Παρατηρῆστε ὅτι $0_R \in C(R)$, ἄρα $C(R) \neq \emptyset$.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $C(R)$ εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ R. Ἰσχύει $C(R) = R$ ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ R εἶναι μεταθετικὸς δακτύλιος.
(β′) Ἔστω ὁ δακτύλιος $M_2(\mathbb{R})$ τῶν 2×2 πινάκων πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἀποδεῖξτε ὅτι $C(M_2(\mathbb{R})) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$.
Ὑπόδειξη: Τὸ ὅτι τὸ ἀριστερὸ μέλος περιέχει τὸ δεξιὸ εἶναι εὔκολο ν' ἀποδειχθεῖ. Γιὰ ν' ἀποδείξετε τὸ ἀντίστροφο, θὰ ὑποθέσετε ὅτι ὁ πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C(M_2(\mathbb{R}))$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι $AB = BA$ γιὰ κάθε $B \in C(M_2(\mathbb{R}))$, ἄρα ἡ σχέση αὐτὴ ἰσχύει γιὰ ὁποιονδήποτε εἰδικὸ πίνακα B. Πάρετε, γιὰ B τον πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in C(M_2(\mathbb{R}))$ καὶ ὕστερα τὸν πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in C(M_2(\mathbb{R}))$.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ′ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.