ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Μικροοικονομική Θεωρία ΙΙΙ (1/4)

Ενότητα # XXX : Μικροοικονομική

Βαγγέλης Τζουβελέκας
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

΄Αδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης **Creative Commons** και ειδικότερα:

  Αναφορά Δημιουργού - Μη εμπορική Χρήση - ΄Οχι Παράγωγα Έργα
  (Attribution - Non Commercial - Non-derivatives)

  Το υλικό είναι ελεύθεροι για Διανομή: για αναπαραγωγή, διανομή, παρουσίαση στο κοινό του Έργου

- Εξαιρείται από την ως άνω άδεια υλικό που περιλαμβάνεται στις διαφάνειες του μαθήματος, και υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης. Η άδεια χρήσης στην οποία υπόκειται το υλικό αυτό αναφέρεται ρητώς.

Περίγραμμα Ενοτήτων

Περίγραμμα Ενοτήτων

1. Αποτελεσματικότητα του Ανταγωνιστικού Υποδείγματος

Περίγραμμα Ενοτήτων

1. Αποτελεσματικότητα του Ανταγωνιστικού Υποδείγματος
2. Εξωτερικές Επιδράσεις

Περίγραμμα Ενοτήτων

Περίγραμμα Ενοτήτων

Περιεχόμενα 1ης Ενότητας

- Το Κριτήριο του Pareto

- Το Κριτήριο του Pareto

$$u_a^0 < u_a^1 \quad \text{και} \quad u_b^0 \leq u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Pareto

$$u_a^0 < u_a^1 \quad \text{και} \quad u_b^0 \leq u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Kaldor (κερδοφόρος αποζημίωση)

- Το Κριτήριο του Pareto

$$u_a^0 < u_a^1 \quad \text{και} \quad u_b^0 \leq u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Kaldor (κερδοφόρος αποζημίωση)

$$u_a^1 - u_a^0 > u_b^0 - u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Pareto

$$u_a^0 < u_a^1 \quad \text{και} \quad u_b^0 \leq u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Kaldor (κερδοφόρος αποζημίωση)

$$u_a^1 - u_a^0 > u_b^0 - u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Hicks (αδυναμία δωροδοκίας)

- Το Κριτήριο του Pareto

$$u_a^0 < u_a^1 \quad \text{και} \quad u_b^0 \leq u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Kaldor (κερδοφόρος αποζημίωση)

$$u_a^1 - u_a^0 > u_b^0 - u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Hicks (αδυναμία δωροδοκίας)
- Το Κριτήριο του Scitovski (ικανοποίηση των κριτηρίων Kaldor και Hicks)

- Το Κριτήριο του Pareto

$$u_a^0 < u_a^1 \quad \text{και} \quad u_b^0 \leq u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Kaldor (κερδοφόρος αποζημίωση)

$$u_a^1 - u_a^0 > u_b^0 - u_b^1$$

- Το Κριτήριο του Hicks (αδυναμία δωροδοκίας)
- Το Κριτήριο του Scitovski (ικανοποίηση των κριτηρίων Kaldor και Hicks)
- Το Κριτήριο του Little (διανομή ευημερίας)

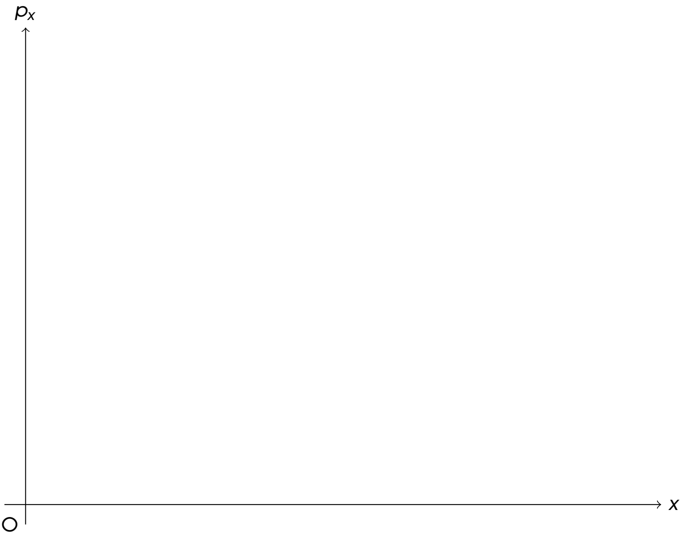
Στην οικονομική ανάλυση χρησιμοποιούμε σαν κριτήριο αποτελεσματικότητας στην παραγωγή και κατανάλωση των αγαθών και υπηρεσιών αυτό του Pareto για δυο βασικούς λόγους:

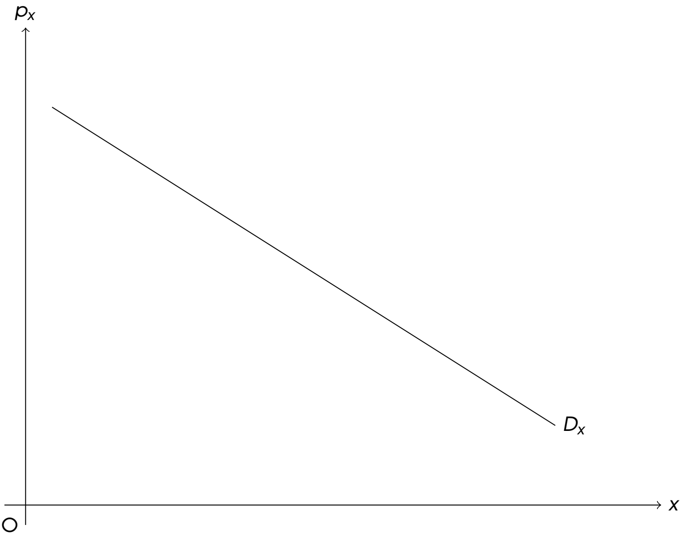
Στην οικονομική ανάλυση χρησιμοποιούμε σαν κριτήριο αποτελεσματικότητας στην παραγωγή και κατανάλωση των αγαθών και υπηρεσιών αυτό του Pareto για δυο βασικούς λόγους:

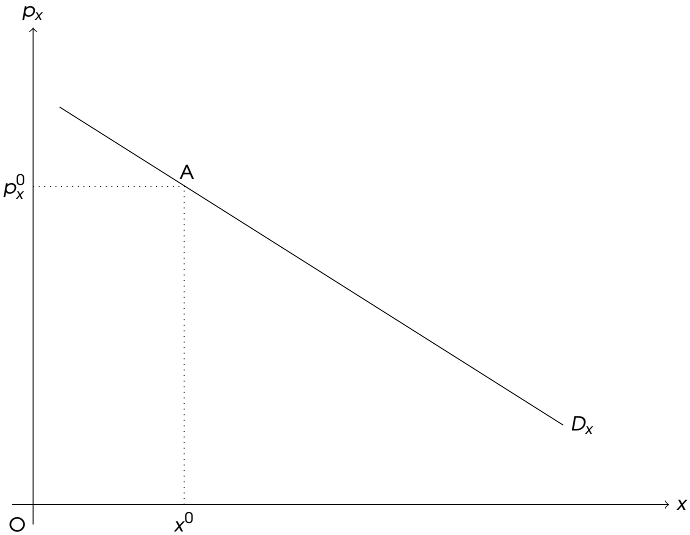
- Η κατανομή χρησιμότητας η οποία είναι άριστη για κάποια σαφή και συγκεκριμένα κριτήρια διαπροσωπικών συγκρίσεων θα είναι πάντοτε κατά Pareto άριστη

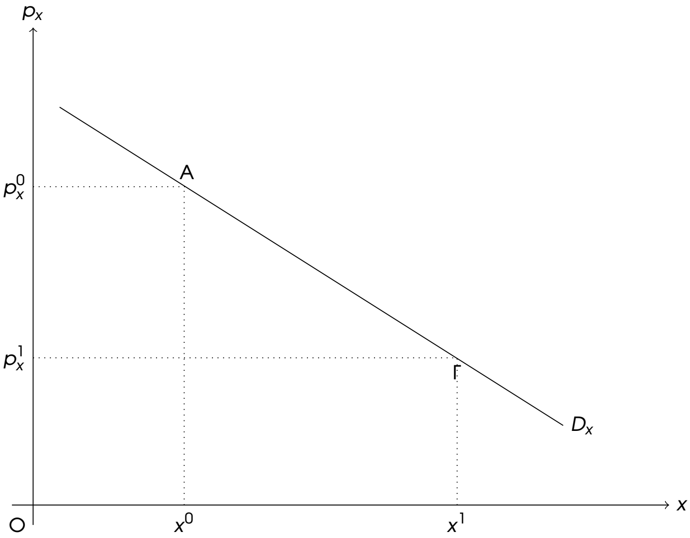
Στην οικονομική ανάλυση χρησιμοποιούμε σαν κριτήριο αποτελεσματικότητας στην παραγωγή και κατανάλωση των αγαθών και υπηρεσιών αυτό του Pareto για δυο βασικούς λόγους:

- Η κατανομή χρησιμότητας η οποία είναι άριστη για κάποια σαφή και συγκεκριμένα κριτήρια διαπροσωπικών συγκρίσεων θα είναι πάντοτε κατά Pareto άριστη
- Η ισορροπία που προκύπτει σε μία ανταγωνιστική οικονομία είναι κατά Pareto άριστη (το κριτήριο του Pareto είναι στενά συνυφασμένο με την αποδοτικότητα των αγορών)

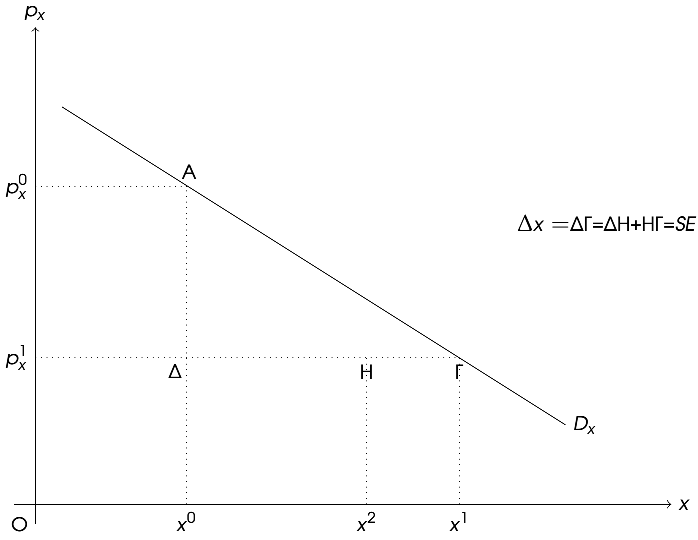

p_x
x
O


p_x
D_x
x
O

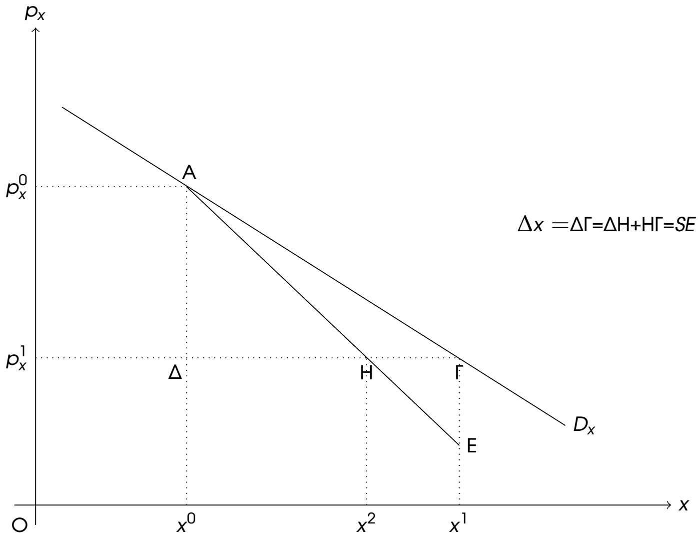

p_x
A
p_x^0
D_x
O
x^0
x



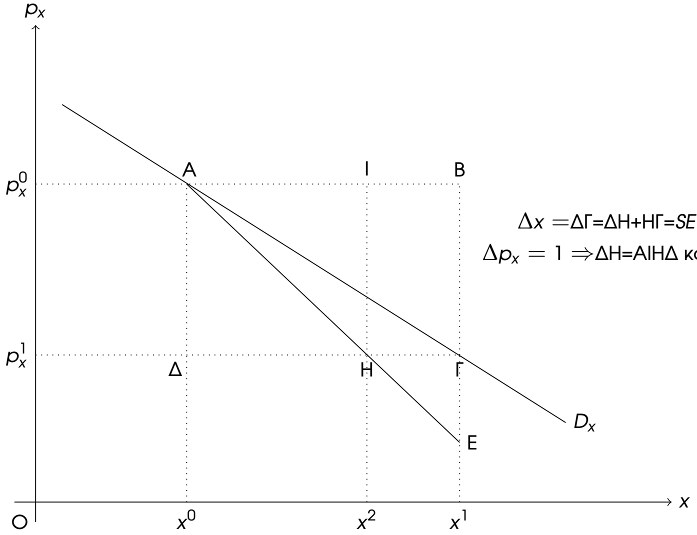
p_x
p_x^0
p_x^1
A
Γ
D_x
x
O
x^0
x^1



$\Delta x =$ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ=$SE + IE$

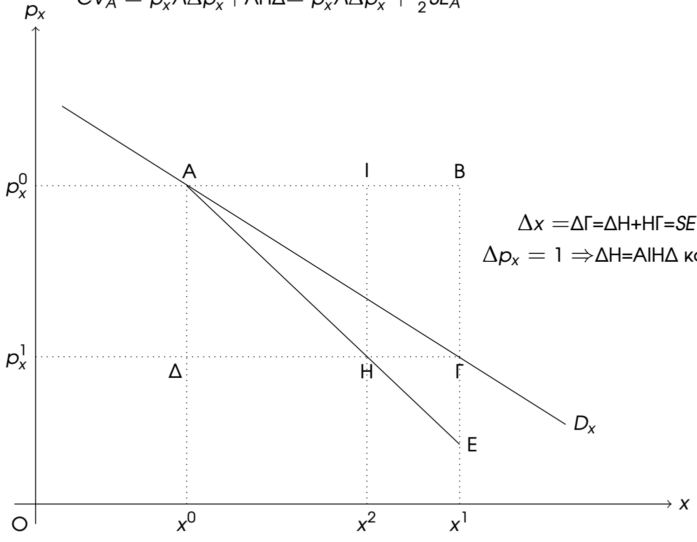


$\Delta x =$ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ=$SE + IE$



p_x
A
I
B
p_x^0
$\Delta x = \Delta\Gamma = \Delta H + H\Gamma = SE + IE$
$\Delta p_x = 1 \Rightarrow \Delta H = AIH\Delta$ και $H\Gamma = IB\Gamma H$
p_x^1
Δ
H
Γ
D_x
E
O
x^0
x^2
x^1
x

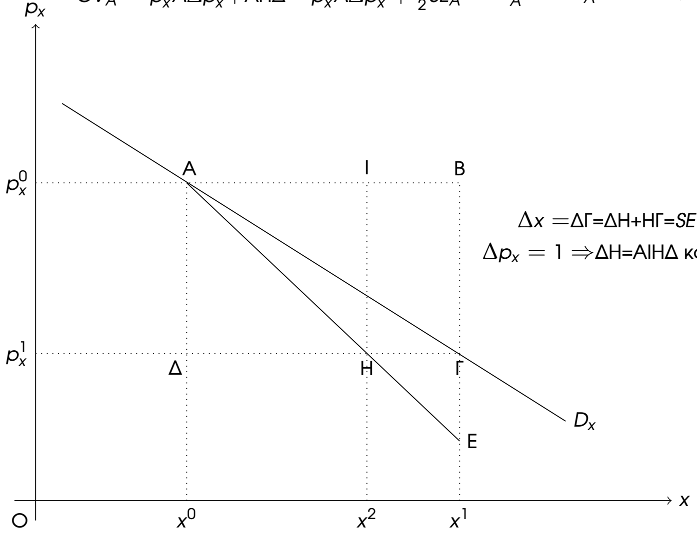
$CV_A = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \text{AHΔ} = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A$



$\Delta x = \text{ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ=}SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow \text{ΔΗ=ΑΙΗΔ και ΗΓ=ΙΒΓΗ}$

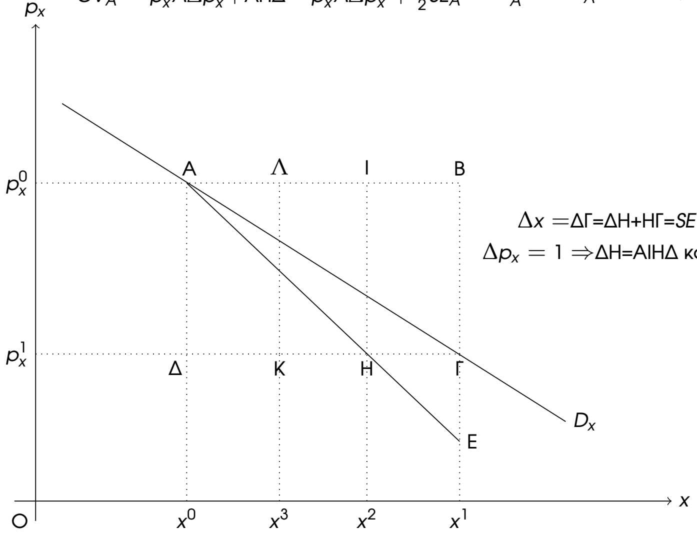
$CV_A = p_x^0 A\Delta p_x^1 + \text{ΑΗΔ} = p_x^0 A\Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \qquad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$



$\Delta x = \text{ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ=}SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΔΗ=ΑΙΗΔ και ΗΓ=ΙΒΓΗ

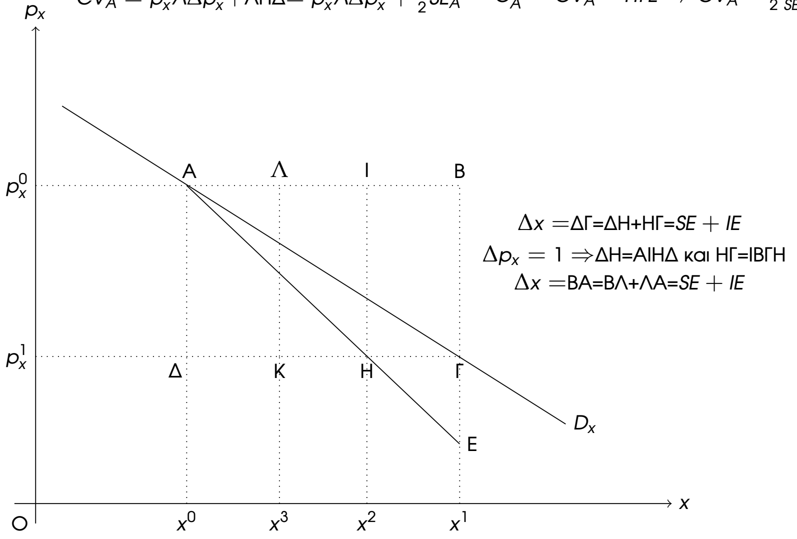
$$CV_A = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \text{ΑΗΔ} = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \qquad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$$



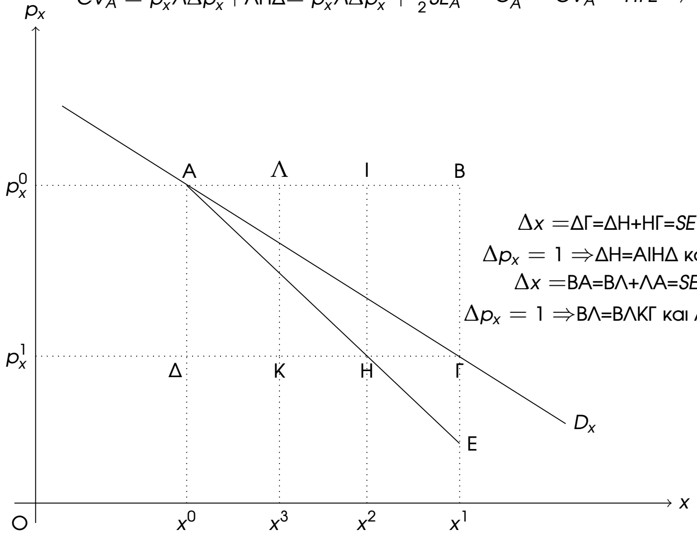
Δx =ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ=$SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΔΗ=ΑΙΗΔ και ΗΓ=ΙΒΓΗ

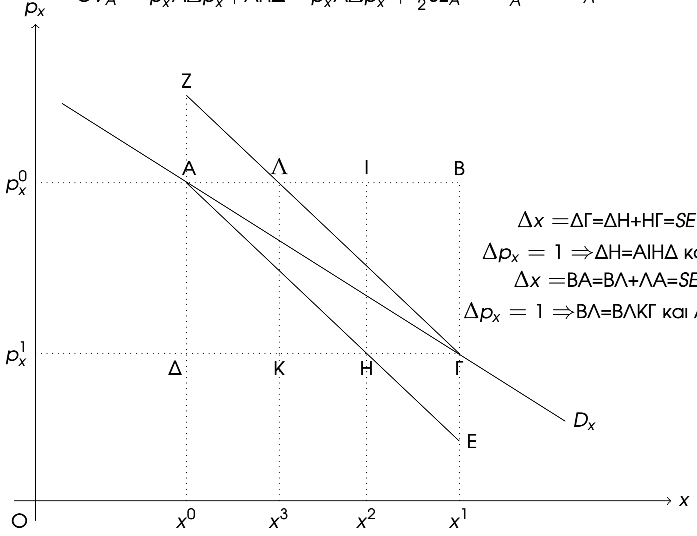
$CV_A = p_x^0 A\Delta p_x^1 +$ΑΗΔ$= p_x^0 A\Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \quad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$



$CV_A = p_x^0 A\Delta p_x^1 + \text{ΑΗΔ} = p_x^0 A\Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \quad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$



$CV_A = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \mathrm{AH\Delta} = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \qquad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$



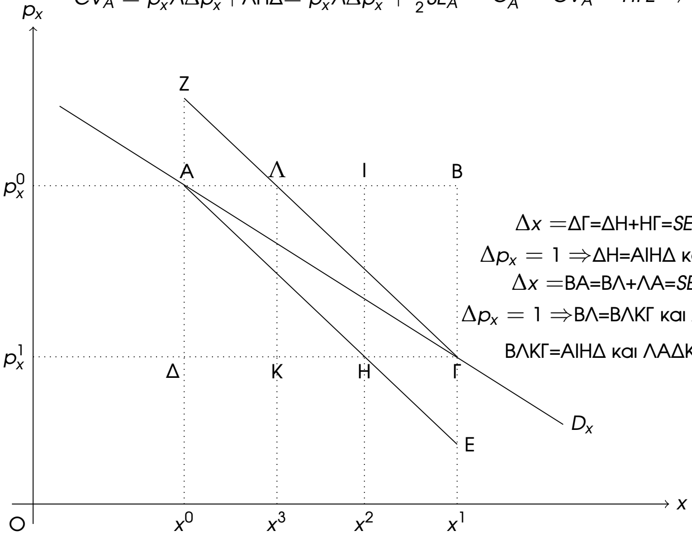
$\Delta x =$ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ=$SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΔΗ=ΑΙΗΔ και ΗΓ=ΙΒΓΗ

$\Delta x =$ΒΑ=ΒΛ+ΛΑ=$SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΒΛ=ΒΛΚΓ και ΛΑ=ΛΑΔΚ

$CV_A = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \text{ΑΗΔ} = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \qquad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$



$\Delta x =$ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ$=SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΔΗ=ΑΙΗΔ και ΗΓ=ΙΒΓΗ

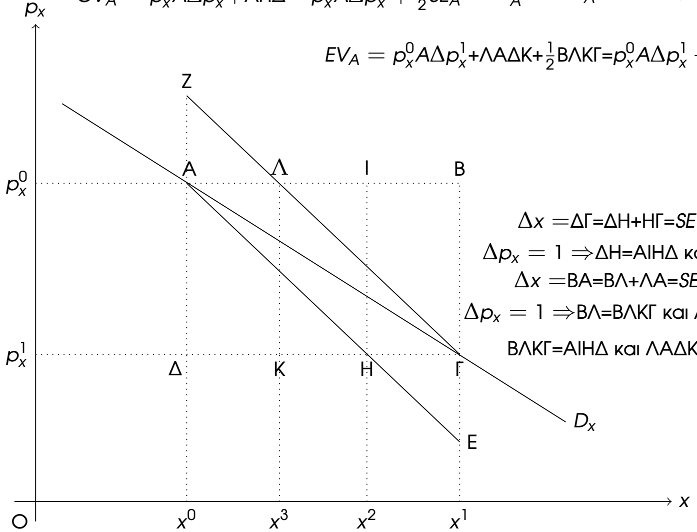
$\Delta x =$ΒΑ=ΒΛ+ΛΑ$=SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΒΛ=ΒΛΚΓ και ΛΑ=ΛΑΔΚ

ΒΛΚΓ=ΑΙΗΔ και ΛΑΔΚ=ΙΒΓΗ

$CV_A = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \text{AH}\Delta = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \qquad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$

$EV_A = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \Lambda\text{A}\Delta\text{K} + \frac{1}{2}\text{B}\Lambda\text{K}\Gamma = p_x^0 A \Delta p_x^1 + IE_A + \frac{1}{2} SE_A$



$\Delta x = \Delta\Gamma = \Delta\text{H} + \text{H}\Gamma = SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow \Delta\text{H} = \text{AIH}\Delta$ και $\text{H}\Gamma = \text{IB}\Gamma\text{H}$

$\Delta x = \text{BA} = \text{B}\Lambda + \Lambda\text{A} = SE + IE$

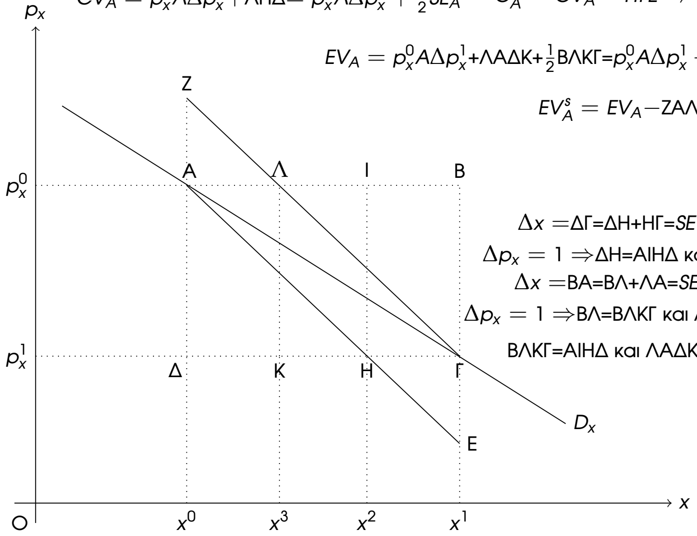
$\Delta p_x = 1 \Rightarrow \text{B}\Lambda = \text{B}\Lambda\text{K}\Gamma$ και $\Lambda\text{A} = \Lambda\text{A}\Delta\text{K}$

$\text{B}\Lambda\text{K}\Gamma = \text{AIH}\Delta$ και $\Lambda\text{A}\Delta\text{K} = \text{IB}\Gamma\text{H}$

$CV_A = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \mathrm{AH\Delta} = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \qquad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$

$EV_A = p_x^0 A \Delta p_x^1 + \mathrm{\Lambda A\Delta K} + \frac{1}{2}\mathrm{B\Lambda K\Gamma} = p_x^0 A \Delta p_x^1 + IE_A + \frac{1}{2} SE_A$

$EV_A^s = EV_A - \mathrm{ZA\Lambda} = EV_A + \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$



$\Delta x =$ ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ$=SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΔΗ=ΑΙΗΔ και ΗΓ=ΙΒΓΗ

$\Delta x =$ΒΑ=ΒΛ+ΛΑ$=SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΒΛ=ΒΛΚΓ και ΛΑ=ΛΑΔΚ

ΒΛΚΓ=ΑΙΗΔ και ΛΑΔΚ=ΙΒΓΗ

$$CV_A = p_x^0 A\Delta p_x^1 + \text{AHΔ} = p_x^0 A\Delta p_x^1 + \frac{1}{2} SE_A \qquad C_A^s = CV_A - H\Gamma E \Rightarrow CV_A - \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$$

$$EV_A = p_x^0 A\Delta p_x^1 + \text{ΛΑΔΚ} + \frac{1}{2}\text{ΒΛΚΓ} = p_x^0 A\Delta p_x^1 + IE_A + \frac{1}{2} SE_A$$

$$EV_A^s = EV_A - \text{ZAΛ} = EV_A + \frac{1}{2}\frac{IE_A^2}{SE_A}$$

$$\boxed{EV_A - CV_A = IE_A}$$

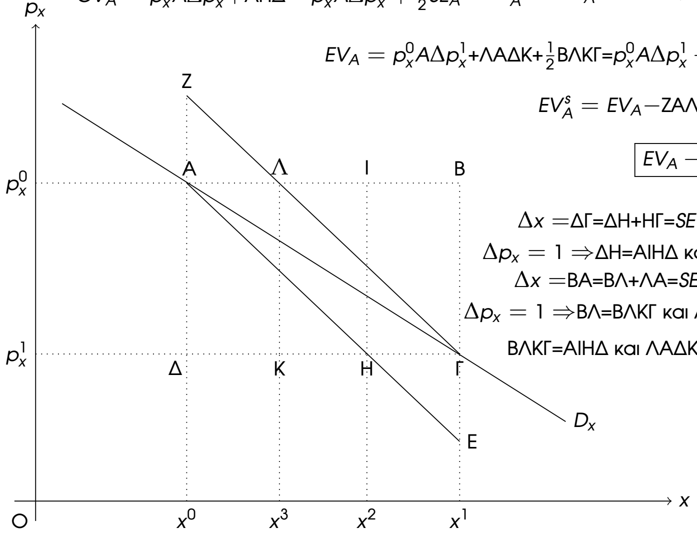
$\Delta x =$ ΔΓ=ΔΗ+ΗΓ$= SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΔΗ=ΑΙΗΔ και ΗΓ=ΙΒΓΗ

$\Delta x =$ ΒΑ=ΒΛ+ΛΑ$= SE + IE$

$\Delta p_x = 1 \Rightarrow$ΒΛ=ΒΛΚΓ και ΛΑ=ΛΑΔΚ

ΒΛΚΓ=ΑΙΗΔ και ΛΑΔΚ=ΙΒΓΗ



Υποθέσεις του Υποδείγματος:

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- δύο αγαθά, (x και y)

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- δύο αγαθά, (x και y)
- η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών είναι δεδομένη

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- δύο αγαθά, (x και y)
- η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών είναι δεδομένη
- οι συναρτήσεις παραγωγής των δύο αγαθών είναι συνεχείς και διαφορίσιμες

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- δύο αγαθά, (x και y)
- η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών είναι δεδομένη
- οι συναρτήσεις παραγωγής των δύο αγαθών είναι συνεχείς και διαφορίσιμες
- δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις στην παραγωγή

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- δύο αγαθά, (x και y)
- η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών είναι δεδομένη
- οι συναρτήσεις παραγωγής των δύο αγαθών είναι συνεχείς και διαφορίσιμες
- δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις στην παραγωγή
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- δύο αγαθά, (x και y)
- η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών είναι δεδομένη
- οι συναρτήσεις παραγωγής των δύο αγαθών είναι συνεχείς και διαφορίσιμες
- δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις στην παραγωγή
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)
- οι παραγωγικοί συντελεστές είναι δεδομένοι, ομοιογενείς και πλήρως διαιρετοί

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

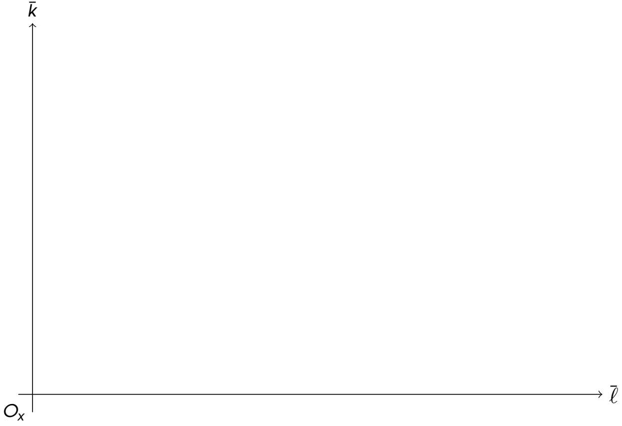
- δύο αγαθά, (x και y)
- η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών είναι δεδομένη
- οι συναρτήσεις παραγωγής των δύο αγαθών είναι συνεχείς και διαφορίσιμες
- δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις στην παραγωγή
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)
- οι παραγωγικοί συντελεστές είναι δεδομένοι, ομοιογενείς και πλήρως διαιρετοί
- τα οριακά προϊόντα των δύο παραγωγικών συντελεστών είναι θετικά και φθίνοντα

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

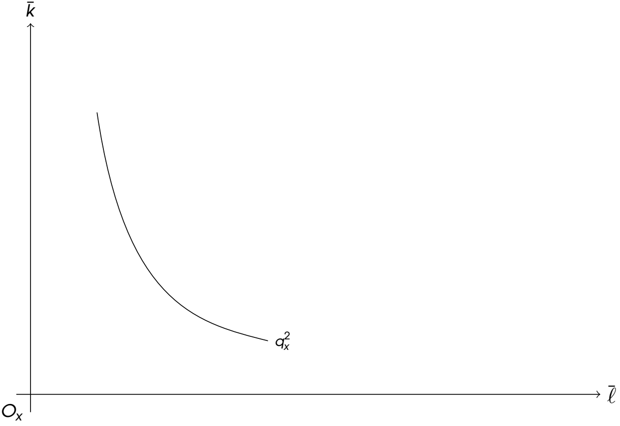
- δύο αγαθά, (x και y)
- η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών είναι δεδομένη
- οι συναρτήσεις παραγωγής των δύο αγαθών είναι συνεχείς και διαφορίσιμες
- δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις στην παραγωγή
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)
- οι παραγωγικοί συντελεστές είναι δεδομένοι, ομοιογενείς και πλήρως διαιρετοί
- τα οριακά προϊόντα των δύο παραγωγικών συντελεστών είναι θετικά και φθίνοντα
- πλήρης ανταγωνισμός στις αγορές της εργασίας και του κεφαλαίου

Διαγραμματική Ανάλυση

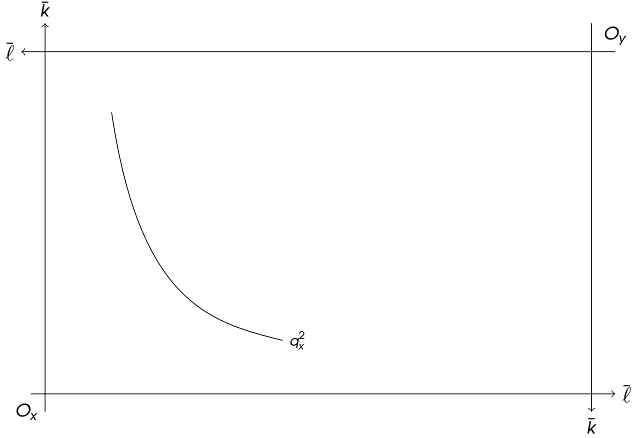
Διαγραμματική Ανάλυση



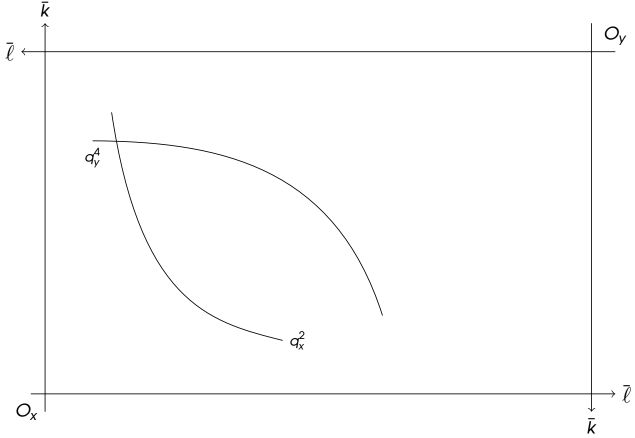
Διαγραμματική Ανάλυση



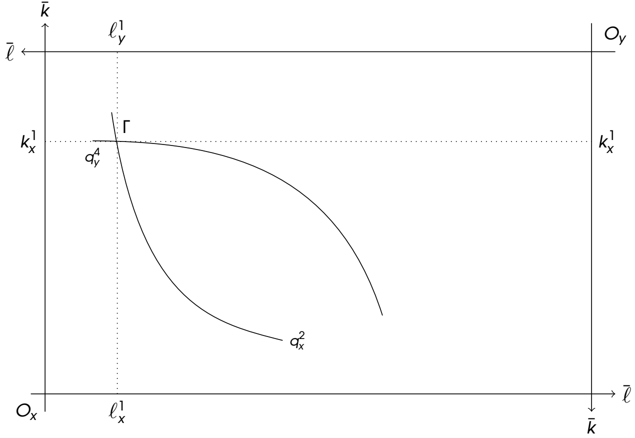
Διαγραμματική Ανάλυση



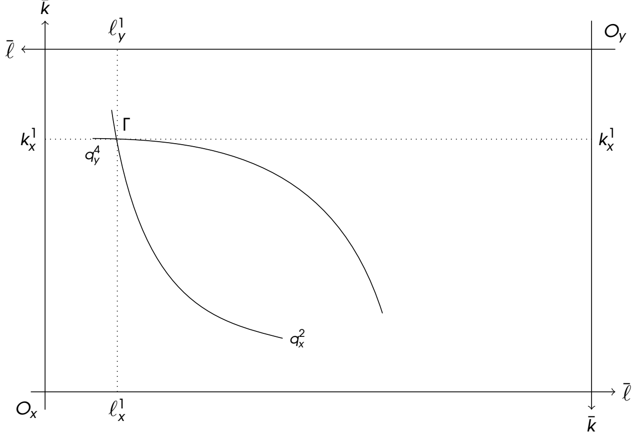
Διαγραμματική Ανάλυση



Διαγραμματική Ανάλυση



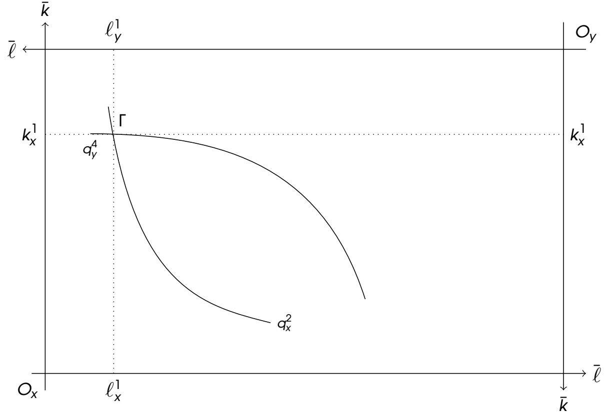
Διαγραμματική Ανάλυση



$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_x k_x^1 + O_y k_y^1 = \bar{k}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}} > \frac{MP_y^{\ell}}{MP_y^{k}}$

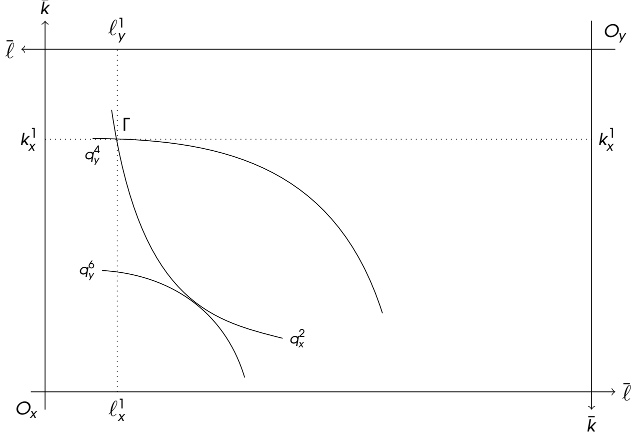


$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_x k_x^1 + O_y k_y^1 = \bar{k}$$

▸ example

Διαγραμματική Ανάλυση

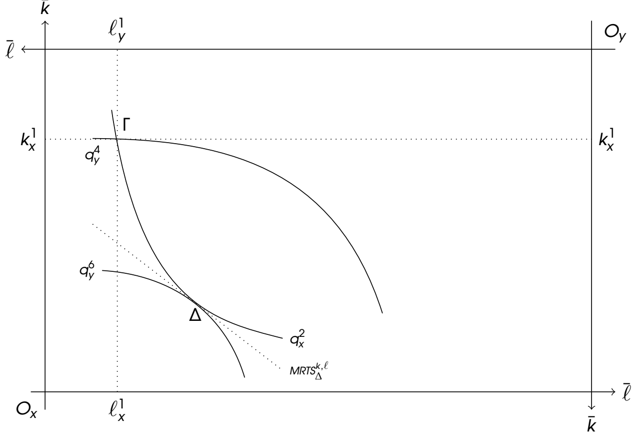
Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$



$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$
$O_xk_x^1 + O_yk_y^1 = \bar{k}$

Διαγραμματική Ανάλυση

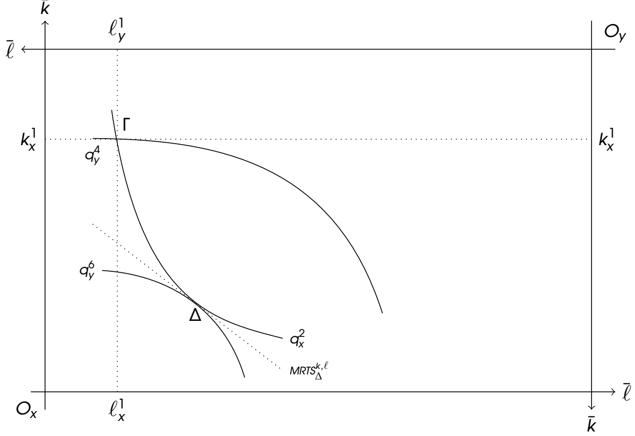
Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$



$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_xk_x^1 + O_yk_y^1 = \bar{k}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

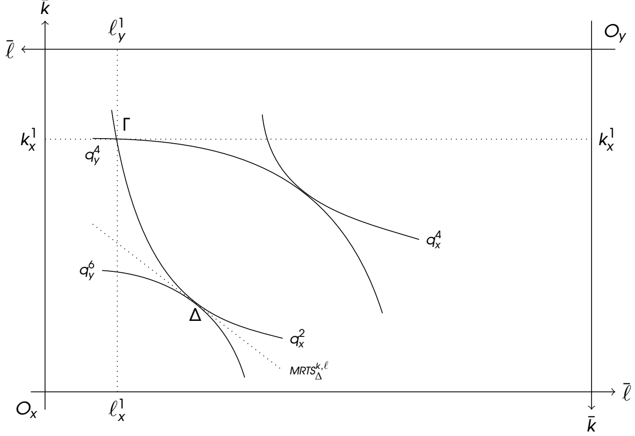
Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$ Δ: $MRTS_x^{k,\ell} = MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} = \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$



$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_x k_x^1 + O_y k_y^1 = \bar{k}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

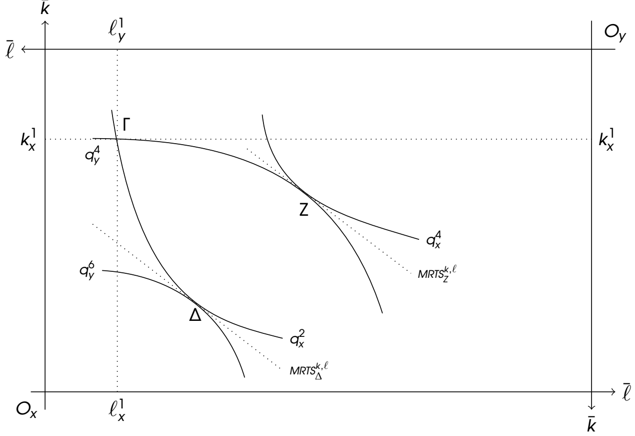
Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}} > \frac{MP_y^{\ell}}{MP_y^{k}}$ Δ: $MRTS_x^{k,\ell} = MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}} = \frac{MP_y^{\ell}}{MP_y^{k}}$



$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_xk_x^1 + O_yk_y^1 = \bar{k}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

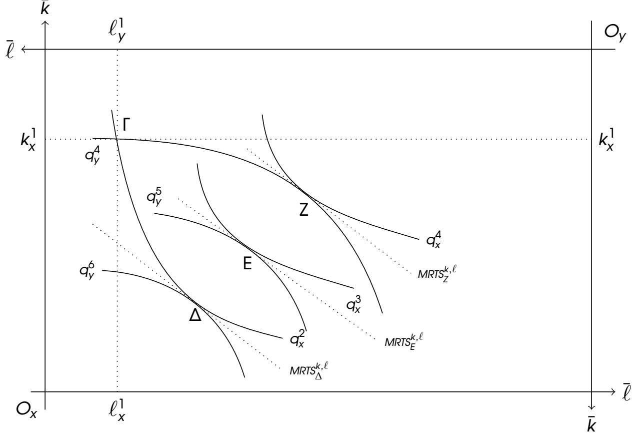
Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$ Δ: $MRTS_x^{k,\ell} = MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} = \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$



$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$
$O_xk_x^1 + O_yk_y^1 = \bar{k}$

Διαγραμματική Ανάλυση

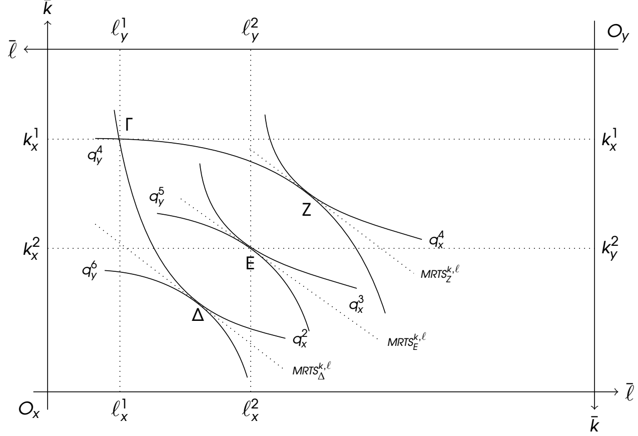
Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$ Δ: $MRTS_x^{k,\ell} = MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} = \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$



$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_x k_x^1 + O_y k_y^1 = \bar{k}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

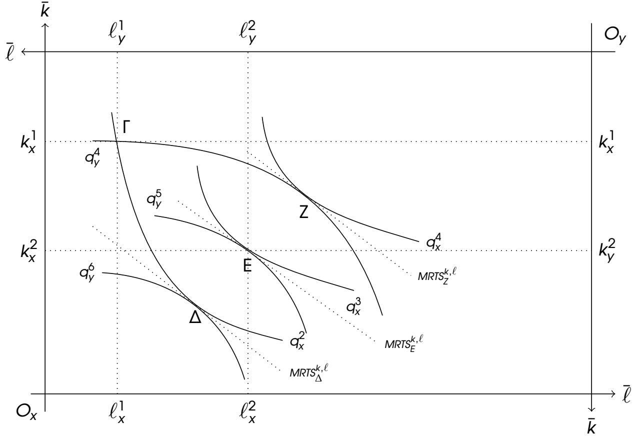
Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$ Δ: $MRTS_x^{k,\ell} = MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} = \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$



$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_x k_x^1 + O_y k_y^1 = \bar{k}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$ Δ: $MRTS_x^{k,\ell} = MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} = \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$

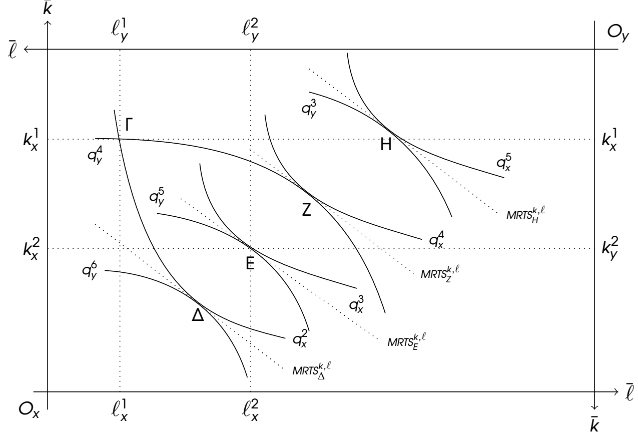


$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_xk_x^1 + O_yk_y^1 = \bar{k}$$

$$O_x\ell_x^2 + O_y\ell_y^2 = \bar{\ell}$$
$$O_xk_x^2 + O_yk_y^2 = \bar{k}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$ Δ: $MRTS_x^{k,\ell} = MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} = \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$

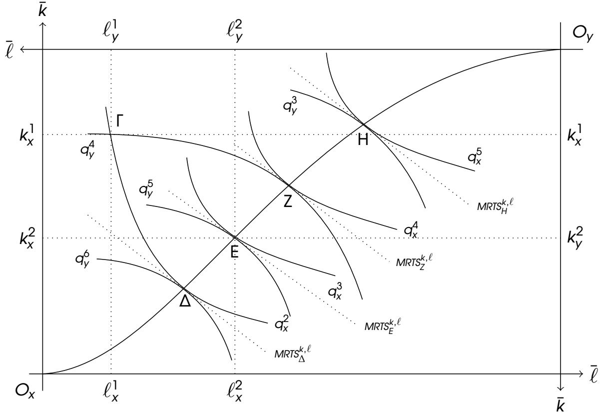


$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_xk_x^1 + O_yk_y^1 = \bar{k}$$

$$O_x\ell_x^2 + O_y\ell_y^2 = \bar{\ell}$$
$$O_xk_x^2 + O_yk_y^2 = \bar{k}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

Γ: $MRTS_x^{k,\ell} > MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} > \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$ Δ: $MRTS_x^{k,\ell} = MRTS_y^{k,\ell} \Rightarrow \frac{MP_x^\ell}{MP_x^k} = \frac{MP_y^\ell}{MP_y^k}$



$$O_x\ell_x^1 + O_y\ell_y^1 = \bar{\ell}$$
$$O_xk_x^1 + O_yk_y^1 = \bar{k}$$

$$O_x\ell_x^2 + O_y\ell_y^2 = \bar{\ell}$$
$$O_xk_x^2 + O_yk_y^2 = \bar{k}$$

back

Αλγεβρική Ανάλυση

Αλγεβρική Ανάλυση

Έστω ότι οι συναρτήσεις παραγωγής των αγαθών x και y:

$$\begin{aligned} x &= f_x\left(k_x, \ell_x\right) \\ y &= f_y\left(k_y, \ell_y\right) \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Έστω ότι οι συναρτήσεις παραγωγής των αγαθών x και y:

$$
\begin{aligned}
x &= f_x\left(k_x, \ell_x\right) \\
y &= f_y\left(k_y, \ell_y\right)
\end{aligned}
$$

για τις οποίες ισχύει:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_x}{\partial k_x} > 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} > 0, \quad \frac{\partial^2 f_x}{\partial k_x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f_x}{\partial \ell_x^2} \leq 0 \\
&\frac{\partial f_y}{\partial k_y} > 0, \quad \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} > 0, \quad \frac{\partial^2 f_y}{\partial k_y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f_y}{\partial \ell_y^2} \leq 0
\end{aligned}
$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Έστω ότι οι συναρτήσεις παραγωγής των αγαθών x και y:

$$\begin{aligned} x &= f_x\left(k_x, \ell_x\right) \\ y &= f_y\left(k_y, \ell_y\right) \end{aligned}$$

για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{\partial f_x}{\partial k_x} > 0, \;\; \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} > 0, \;\; \frac{\partial^2 f_x}{\partial k_x^2} \leq 0, \;\; \frac{\partial^2 f_x}{\partial \ell_x^2} \leq 0$$
$$\frac{\partial f_y}{\partial k_y} > 0, \;\; \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} > 0, \;\; \frac{\partial^2 f_y}{\partial k_y^2} \leq 0, \;\; \frac{\partial^2 f_y}{\partial \ell_y^2} \leq 0$$

Επιπλέον οι παραγωγικοί συντελεστές δεν υποαπασχολούνται:

$$\bar{k} = k_x + k_y \quad \text{και} \quad \bar{\ell} = \ell_x + \ell_y$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η αποτελεσματική κατανομή των παραγωγικών συντελεστών επιτυγχάνεται μεγιστοποιώντας το επίπεδο παραγωγής του ενός προϊόντος με δεδομένο το επίπεδο παραγωγής του άλλου προϊόντος και τις διαθέσιμες ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας.

Αλγεβρική Ανάλυση

Η αποτελεσματική κατανομή των παραγωγικών συντελεστών επιτυγχάνεται μεγιστοποιώντας το επίπεδο παραγωγής του ενός προϊόντος με δεδομένο το επίπεδο παραγωγής του άλλου προϊόντος και τις διαθέσιμες ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \max_{\ell_x, k_x} x &= f_x\left(k_x, \ell_x\right) \\ \text{s.t. } \bar{y} &= f_y\left(k_y, \ell_y\right) \\ \bar{k} &= k_x + k_y \\ \bar{\ell} &= \ell_x + \ell_y \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η αποτελεσματική κατανομή των παραγωγικών συντελεστών επιτυγχάνεται μεγιστοποιώντας το επίπεδο παραγωγής του ενός προϊόντος με δεδομένο το επίπεδο παραγωγής του άλλου προϊόντος και τις διαθέσιμες ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \max_{\ell_x, k_x} x &= f_x\left(k_x, \ell_x\right) \\ \text{s.t. } \bar{y} &= f_y\left(k_y, \ell_y\right) \\ \bar{k} &= k_x + k_y \\ \bar{\ell} &= \ell_x + \ell_y \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος, ενσωματώνοντας τους δύο τελευταίους περιορισμούς στον πρώτο, έχει ως εξής:

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial k_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k_x} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial k_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial k_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial k_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial k_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y} \Rightarrow MP_x^{k} = -\lambda MP_y^{k}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial k_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial k_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y} \Rightarrow MP_x^{k} = -\lambda MP_y^{k}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial k_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial k_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y} \Rightarrow MP_x^{k} = -\lambda MP_y^{k}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right) = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial k_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial k_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y} \Rightarrow MP_x^{k} = -\lambda MP_y^{k}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right) = 0$$

Διαιρώντας κατά μέλη την πρώτη με την δεύτερη προκύπτει:

$$\begin{aligned} MP_x^{\ell} &= -\lambda MP_y^{\ell} \\ MP_x^{k} &= -\lambda MP_y^{k} \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x, \ell_x, \lambda\right) = f_x\left(k_x, \ell_x\right) + \lambda\left[\bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_x} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y}\frac{\partial \ell_y}{\partial \ell_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial \ell_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \ell_y} \Rightarrow MP_x^{\ell} = -\lambda MP_y^{\ell} \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f_x}{\partial k_x} - \lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k_x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial k_x} = -\lambda \frac{\partial f_y}{\partial k_y} \Rightarrow MP_x^{k} = -\lambda MP_y^{k} \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \bar{y} - f_y\left(\bar{k} - k_x, \bar{\ell} - \ell_x\right) = 0
\end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη την πρώτη με την δεύτερη προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} MP_x^{\ell} &= -\lambda MP_y^{\ell} \\ MP_x^{k} &= -\lambda MP_y^{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}} = \frac{MP_y^{\ell}}{MP_y^{k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(k_x,\ell_x,\lambda\right)=f_x\left(k_x,\ell_x\right)+\lambda\left[\bar{y}-f_y\left(\bar{k}-k_x,\bar{\ell}-\ell_x\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\ell_x}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f_x}{\partial\ell_x}-\lambda\frac{\partial f_y}{\partial\ell_y}\frac{\partial\ell_y}{\partial\ell_x}=0\Rightarrow\frac{\partial f_x}{\partial\ell_x}=-\lambda\frac{\partial f_y}{\partial\ell_y}\Rightarrow MP_x^{\ell}=-\lambda MP_y^{\ell}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial k_x}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f_x}{\partial k_x}-\lambda\frac{\partial f_y}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k_x}=0\Rightarrow\frac{\partial f_x}{\partial k_x}=-\lambda\frac{\partial f_y}{\partial k_y}\Rightarrow MP_x^{k}=-\lambda MP_y^{k}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\lambda}=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{y}-f_y\left(\bar{k}-k_x,\bar{\ell}-\ell_x\right)=0$$

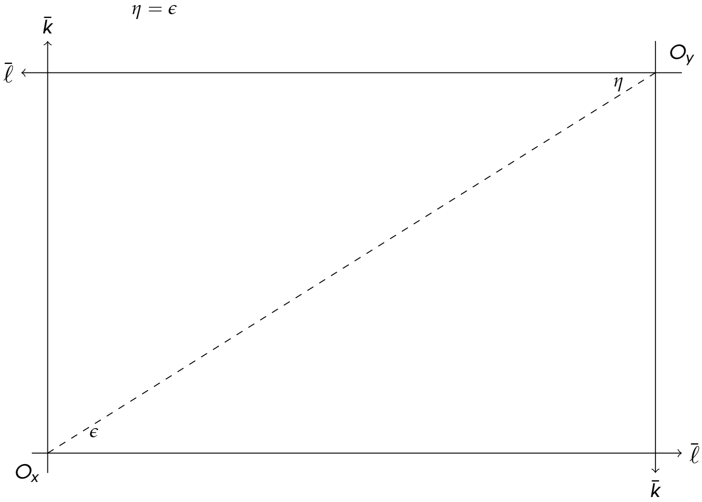
Διαιρώντας κατά μέλη την πρώτη με την δεύτερη προκύπτει:

$$\left.\begin{matrix}MP_x^{\ell}=-\lambda MP_y^{\ell}\\ MP_x^{k}=-\lambda MP_y^{k}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}}=\frac{MP_y^{\ell}}{MP_y^{k}}\Rightarrow\boxed{MRTS_x^{k,\ell}=MRTS_y^{k,\ell}}$$

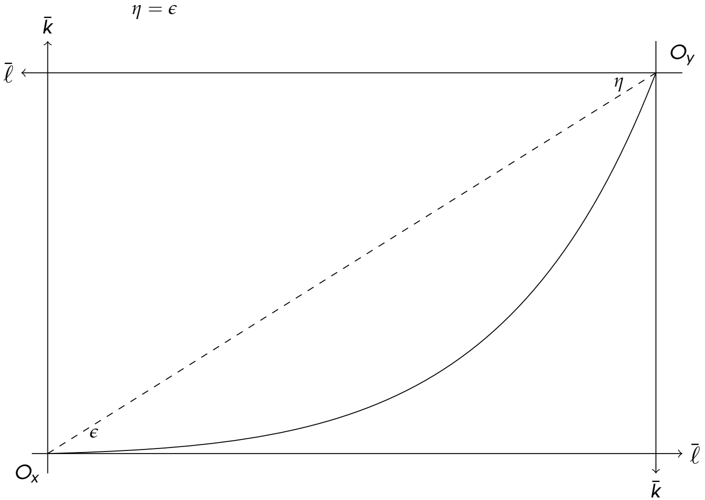
που αποτελεί και την πρώτη κατά Pareto συνθήκη ισορροπίας.

Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία

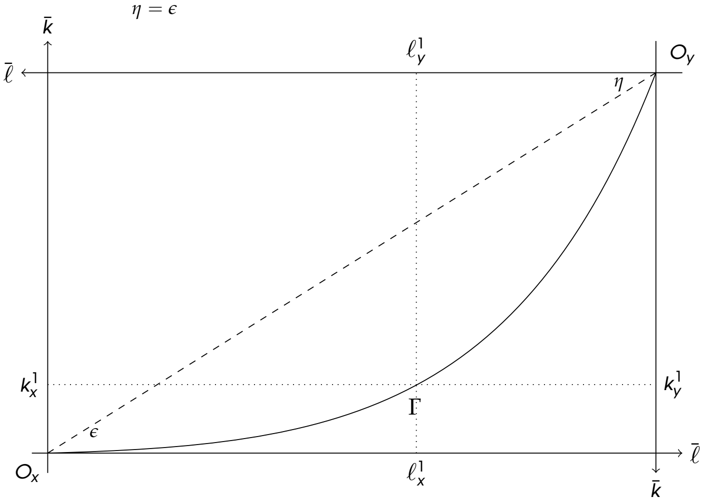
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



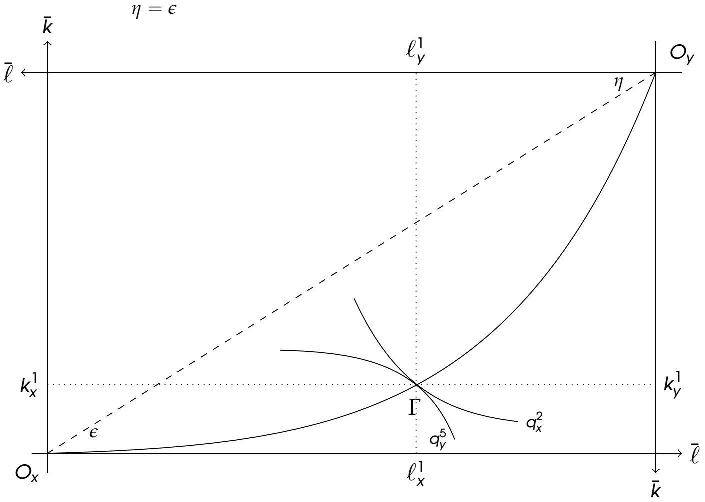
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



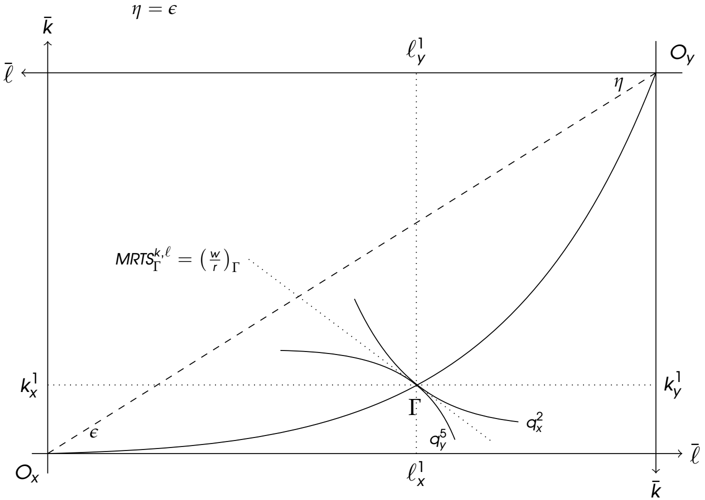
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



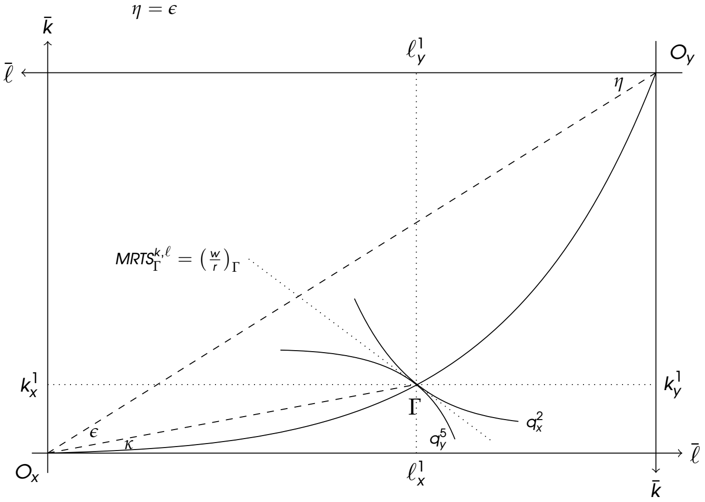
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



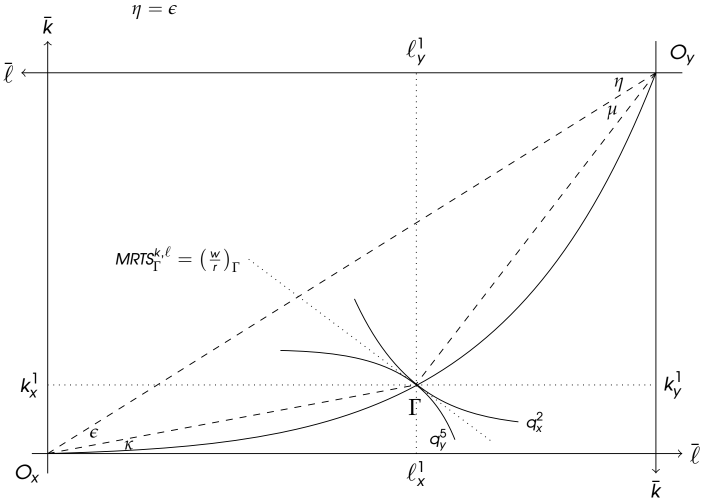
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



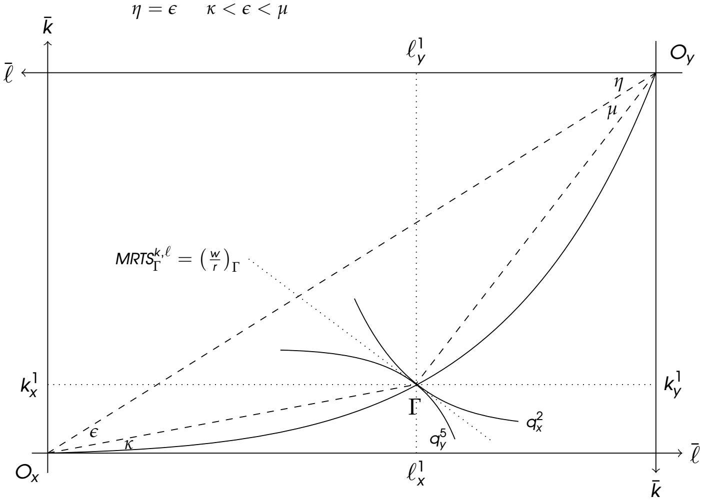
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



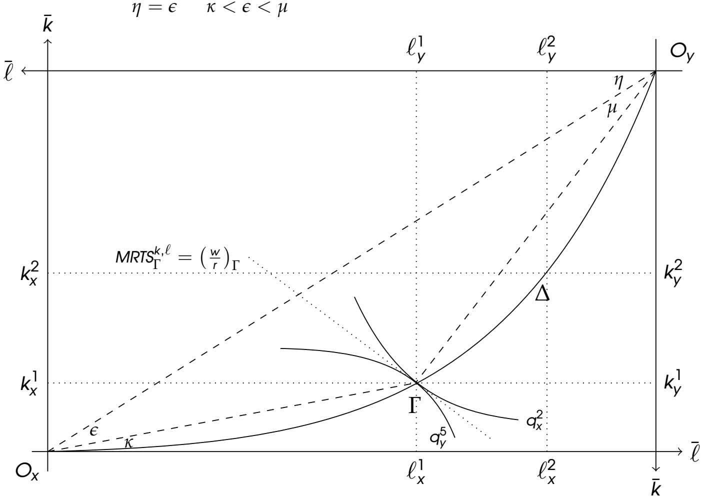
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



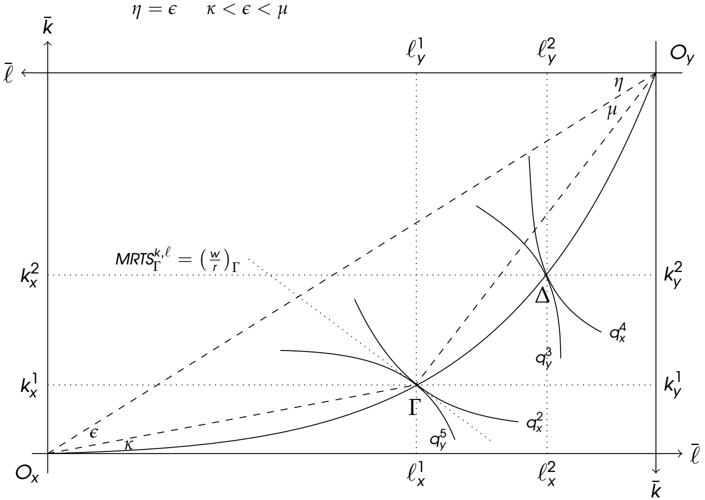
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



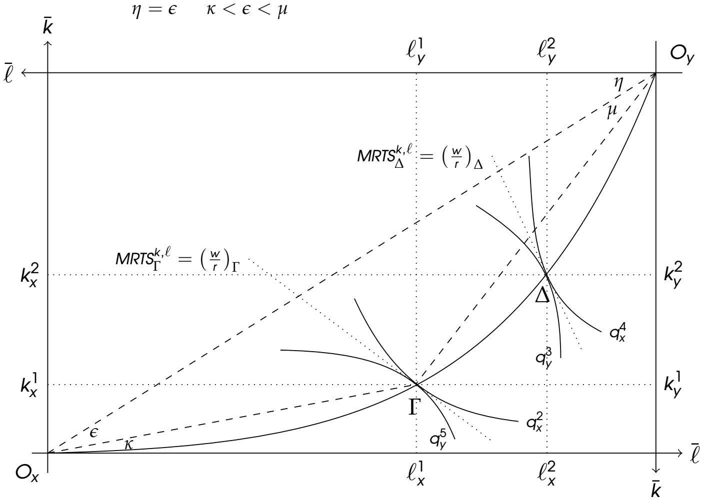
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



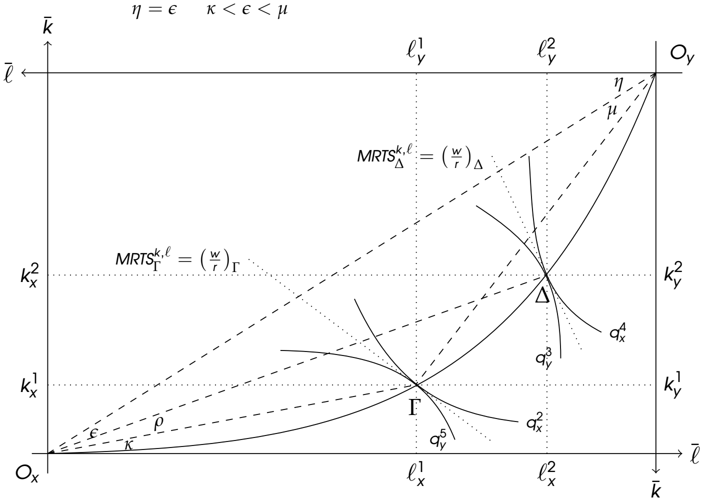
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία

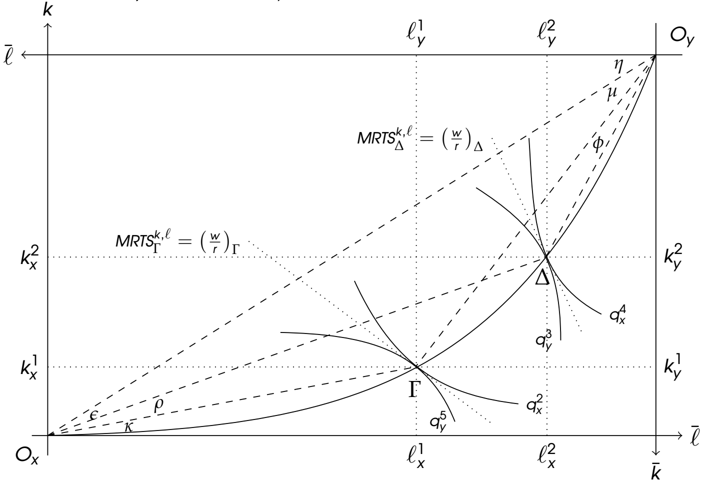


Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία



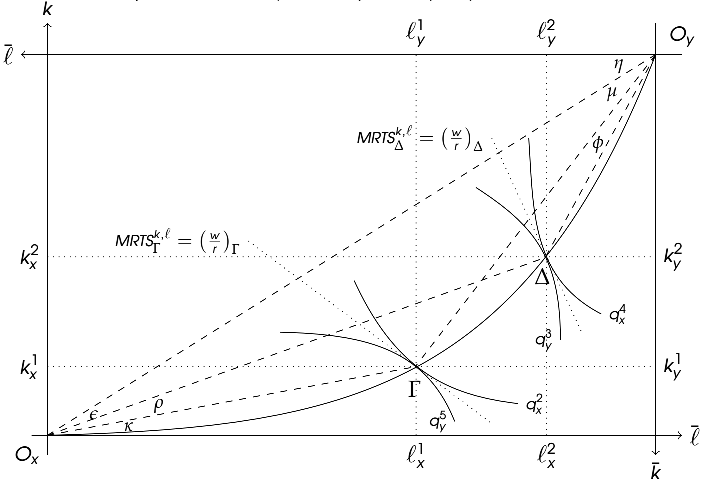
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία

$\eta = \epsilon \qquad \kappa < \epsilon < \mu$



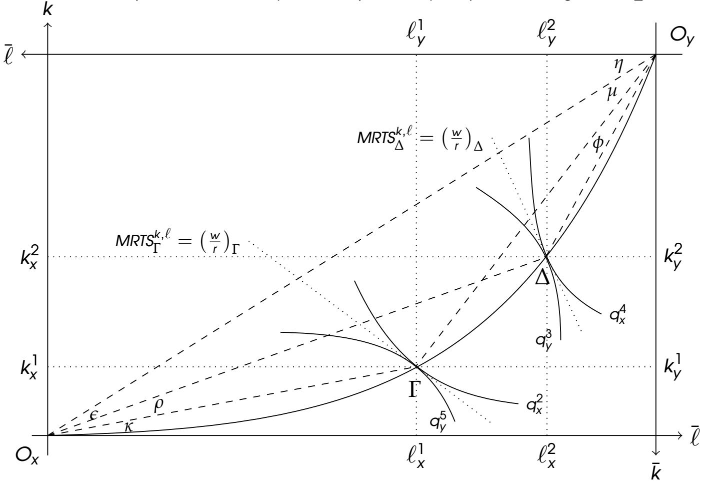
Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία

$\eta = \epsilon \quad \kappa < \epsilon < \mu \quad \kappa < \rho < \epsilon < \mu < \phi$



Ο Λόγος Κεφαλαίου προς Εργασία

$\eta = \epsilon \quad \kappa < \epsilon < \mu \quad \kappa < \rho < \epsilon < \mu < \phi \quad \left(\frac{w}{r}\right)_G < \left(\frac{w}{r}\right)_\Delta$



Θεώρημα Stopler-Samuelson

Θεώρημα Stopler-Samuelson

Η αύξηση της παραγωγής του προϊόντος εντάσεως εργασίας με αντίστοιχη μείωση της παραγωγής του προϊόντος εντάσεως κεφαλαίου οδηγεί στην αύξηση του λόγου κεφαλαίου προς εργασία στην οικονομία καθώς και στην αύξηση των σχετικών τιμών των εισροών και την ανακατανομή του εισοδήματος προς όφελος της εργασίας.

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- ένας καταναλωτής (A)

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- ένας καταναλωτής (A)
- η εργασία (ℓ) είναι ο μοναδικός παραγωγικός συντελεστής

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- ένας καταναλωτής (A)
- η εργασία (ℓ) είναι ο μοναδικός παραγωγικός συντελεστής
- ένα αγαθό (x) το οποίο παράγει αποκλειστικά ο A

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- ένας καταναλωτής (A)
- η εργασία (ℓ) είναι ο μοναδικός παραγωγικός συντελεστής
- ένα αγαθό (x) το οποίο παράγει αποκλειστικά ο A
- ο A προσφέρει την εργασία του και καταναλώνει αποκλειστικά το αγαθό x

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- ένας καταναλωτής (A)
- η εργασία (ℓ) είναι ο μοναδικός παραγωγικός συντελεστής
- ένα αγαθό (x) το οποίο παράγει αποκλειστικά ο A
- ο A προσφέρει την εργασία του και καταναλώνει αποκλειστικά το αγαθό x
- εκτός από το αγαθό x ο A καταναλώνει ανάπαυση (d), την οποία θυσιάζει προκειμένου να εργαστεί στην παραγωγή του αγαθού x

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- ένας καταναλωτής (A)
- η εργασία (ℓ) είναι ο μοναδικός παραγωγικός συντελεστής
- ένα αγαθό (x) το οποίο παράγει αποκλειστικά ο A
- ο A προσφέρει την εργασία του και καταναλώνει αποκλειστικά το αγαθό x
- εκτός από το αγαθό x ο A καταναλώνει ανάπαυση (d), την οποία θυσιάζει προκειμένου να εργαστεί στην παραγωγή του αγαθού x
- η ανάπαυση είναι κανονικό αγαθό για τον A

Υποθέσεις του Υποδείγματος:

- ένας καταναλωτής (A)
- η εργασία (ℓ) είναι ο μοναδικός παραγωγικός συντελεστής
- ένα αγαθό (x) το οποίο παράγει αποκλειστικά ο A
- ο A προσφέρει την εργασία του και καταναλώνει αποκλειστικά το αγαθό x
- εκτός από το αγαθό x ο A καταναλώνει ανάπαυση (d), την οποία θυσιάζει προκειμένου να εργαστεί στην παραγωγή του αγαθού x
- η ανάπαυση είναι κανονικό αγαθό για τον A
- οι οριακές χρησιμότητες του x και της ανάπαυσης είναι θετικές και φθίνουσες

Αλγεβρική Ανάλυση

Αλγεβρική Ανάλυση

Η συνάρτηση χρησιμότητας του A:

$$u_a = f_a\left(x_a, d_a\right) \quad \text{και} \quad H = d_a + \ell_a \Rightarrow d_a = H - \ell_a$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η συνάρτηση χρησιμότητας του A:

$$u_a = f_a\left(x_a, d_a\right) \quad \text{και} \quad H = d_a + \ell_a \Rightarrow d_a = H - \ell_a$$

για την οποία ισχύει: $\partial f_a/\partial x_a > 0$, $\partial f_a/\partial d_a > 0$ και $\partial f_a/\partial \ell_a < 0$.

Αλγεβρική Ανάλυση

Η συνάρτηση χρησιμότητας του A:

$$u_a = f_a\left(x_a, d_a\right) \quad \text{και} \quad H = d_a + \ell_a \Rightarrow d_a = H - \ell_a$$

για την οποία ισχύει: $\partial f_a / \partial x_a > 0$, $\partial f_a / \partial d_a > 0$ και $\partial f_a / \partial \ell_a < 0$.

Η προσφερόμενη ποσότητα εργασίας προσδιορίζεται από:

$$\begin{aligned} \max_{\ell_a} u_a &= f_a\left(x_a, d_a\right) \\ \text{s.t. } x_a &= f_x\left(\ell_a\right) \\ d_a &= H - \ell^a \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η συνάρτηση χρησιμότητας του A:

$$u_a = f_a\left(x_a, d_a\right) \quad \text{και} \quad H = d_a + \ell_a \Rightarrow d_a = H - \ell_a$$

για την οποία ισχύει: $\partial f_a / \partial x_a > 0$, $\partial f_a / \partial d_a > 0$ και $\partial f_a / \partial \ell_a < 0$.
Η προσφερόμενη ποσότητα εργασίας προσδιορίζεται από:

$$\begin{aligned}
\max_{\ell_a} u_a &= f_a\left(x_a, d_a\right) \\
\text{s.t. } x_a &= f_x\left(\ell_a\right) \\
d_a &= H - \ell^a
\end{aligned}$$

Η συνθήκη πρώτης τάξης για μέγιστο απαιτεί όπως

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_a}\frac{\partial x_a}{\partial \ell_a} + \frac{\partial f_a}{\partial d_a}\frac{\partial d_a}{\partial \ell_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η συνάρτηση χρησιμότητας του A:

$$u_a = f_a\left(x_a, d_a\right) \quad \text{και} \quad H = d_a + \ell_a \Rightarrow d_a = H - \ell_a$$

για την οποία ισχύει: $\partial f_a / \partial x_a > 0$, $\partial f_a / \partial d_a > 0$ και $\partial f_a / \partial \ell_a < 0$.
Η προσφερόμενη ποσότητα εργασίας προσδιορίζεται από:

$$\begin{aligned} \max_{\ell_a} u_a &= f_a\left(x_a, d_a\right) \\ \text{s.t. } x_a &= f_x\left(\ell_a\right) \\ d_a &= H - \ell^a \end{aligned}$$

Η συνθήκη πρώτης τάξης για μέγιστο απαιτεί όπως

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_a}\frac{\partial x_a}{\partial \ell_a} + \frac{\partial f_a}{\partial d_a}\frac{\partial d_a}{\partial \ell_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x MP_x^\ell - MU_a^\ell = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

ή

$$MU_a^x MP_x^\ell - MU_a^\ell = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

ή

$$MU_a^x MP_x^\ell - MU_a^\ell = 0 \Rightarrow \frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = MP_x^\ell$$

Αλγεβρική Ανάλυση

ή

$$MU_a^x MP_x^\ell - MU_a^\ell = 0 \Rightarrow \frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = MP_x^\ell \Rightarrow MRS_a^{x,\ell} = MP_x^\ell$$

Αλγεβρική Ανάλυση

ή

$$MU_a^x MP_x^\ell - MU_a^\ell = 0 \Rightarrow \frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = MP_x^\ell \Rightarrow MRS_a^{x,\ell} = MP_x^\ell$$

Εναλλακτικά

$$MU_a^x MP_x^\ell = MU_a^\ell$$

Αλγεβρική Ανάλυση

ή

$$MU_a^x MP_x^\ell - MU_a^\ell = 0 \Rightarrow \frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = MP_x^\ell \Rightarrow MRS_a^{x,\ell} = MP_x^\ell$$

Εναλλακτικά

$$MU_a^x MP_x^\ell = MU_a^\ell$$

Γενικεύοντας το υπόδειγμα για δύο αγαθά:

$$MU_a^x MP_x^\ell = MU_a^\ell$$
$$MU_a^y MP_y^\ell = MU_a^\ell$$

Αλγεβρική Ανάλυση

ή

$$MU_a^x MP_x^\ell - MU_a^\ell = 0 \Rightarrow \frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = MP_x^\ell \Rightarrow MRS_a^{x,\ell} = MP_x^\ell$$

Εναλλακτικά

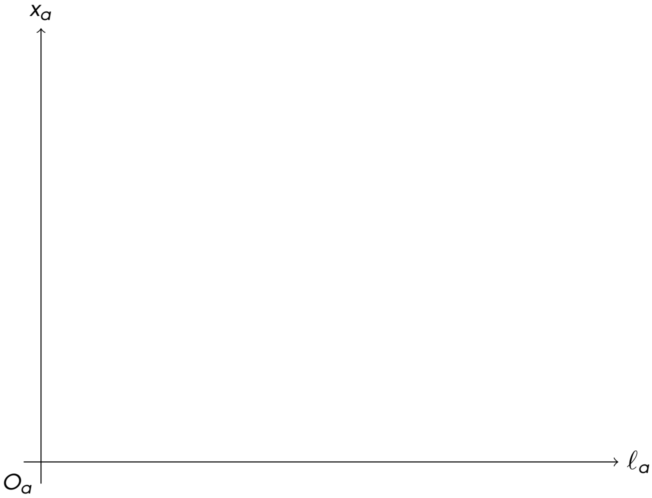
$$MU_a^x MP_x^\ell = MU_a^\ell$$

Γενικεύοντας το υπόδειγμα για δύο αγαθά:

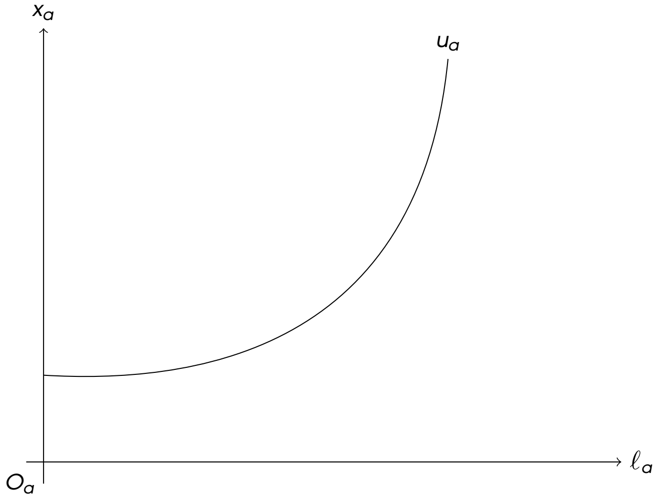
$$\left.\begin{aligned} MU_a^x MP_x^\ell = MU_a^\ell \\ MU_a^y MP_y^\ell = MU_a^\ell \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{MU_a^x MP_x^\ell = MU_a^y MP_y^\ell}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

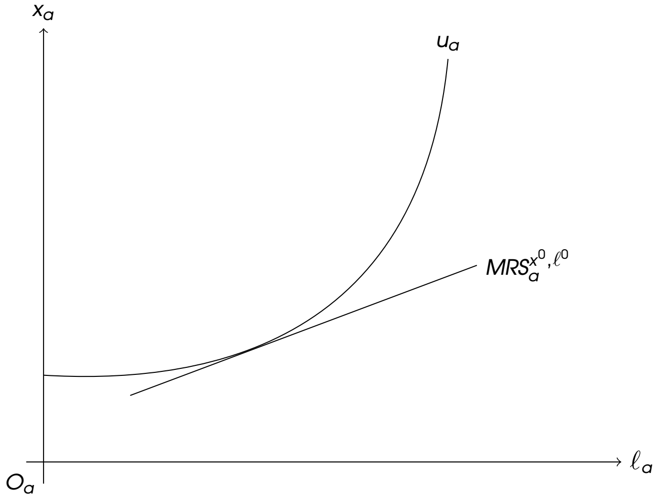
Διαγραμματική Ανάλυση



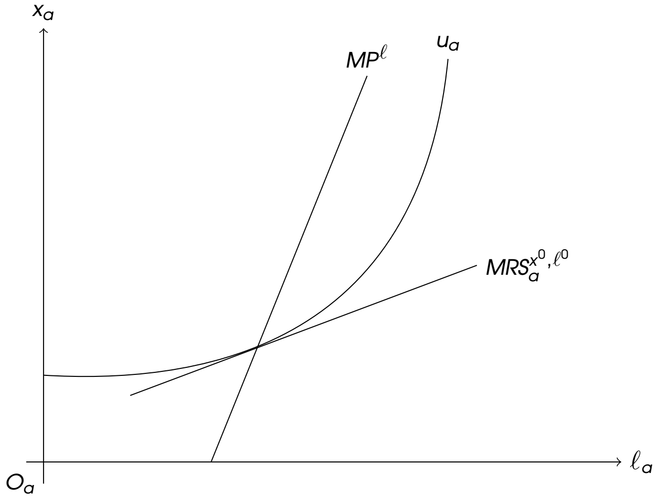
Διαγραμματική Ανάλυση



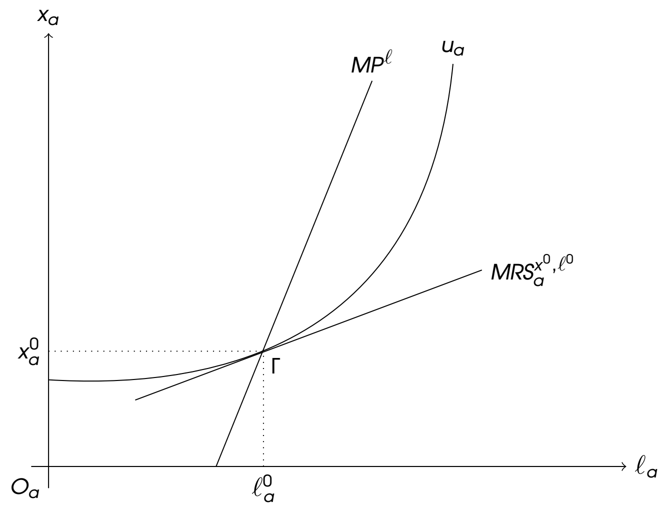
Διαγραμματική Ανάλυση



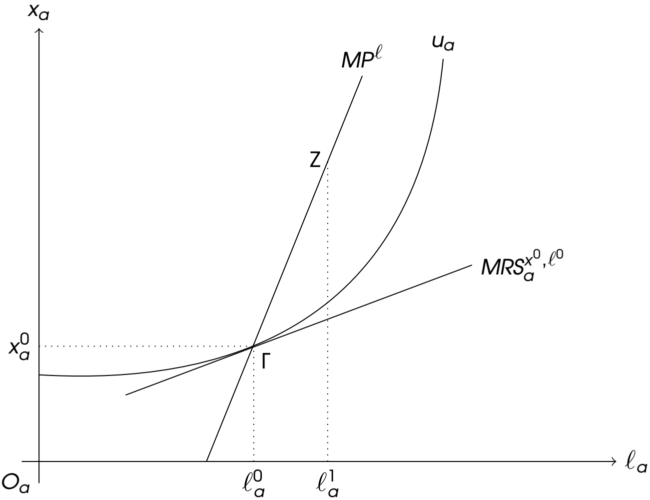
Διαγραμματική Ανάλυση



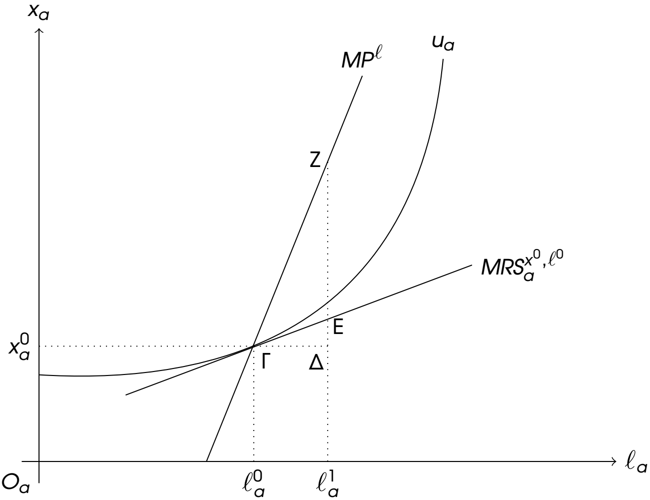
Διαγραμματική Ανάλυση



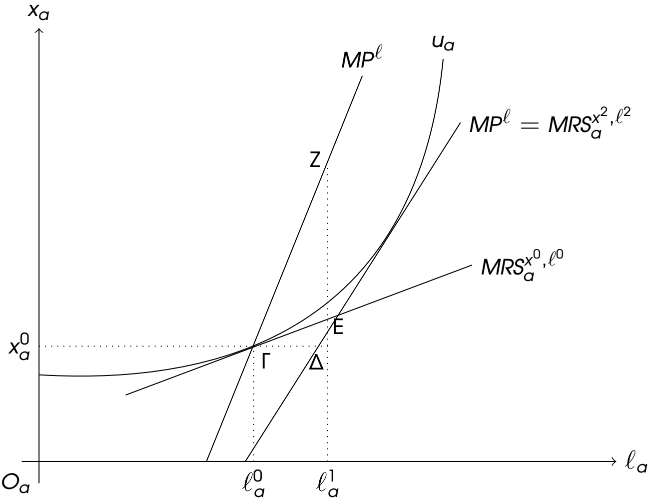
Διαγραμματική Ανάλυση



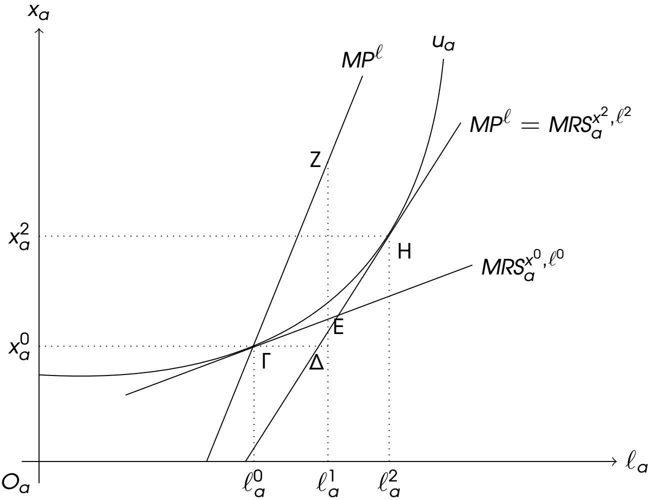
Διαγραμματική Ανάλυση



Διαγραμματική Ανάλυση



Διαγραμματική Ανάλυση



Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

Σε κάθε σημείο της καμπύλης άριστων σημείων κατανομής θα ισχύει:

$$x^* = f_x\left(k_x^*, \ell_x^*\right) \quad \text{και} \quad y^* = f_y\left(k_y^*, \ell_y^*\right)$$

Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

Σε κάθε σημείο της καμπύλης άριστων σημείων κατανομής θα ισχύει:

$$x^* = f_x\left(k_x^*, \ell_x^*\right) \quad \text{και} \quad y^* = f_y\left(k_y^*, \ell_y^*\right)$$

Δεδομένου ότι $\bar{k} = k_x + k_y$ και $\bar{\ell} = \ell_x + \ell_y$, ισχύει επίσης:

$$y^* = f_y\left(\bar{k} - k_x^*, \bar{\ell} - \ell_x^*\right) = \phi_y\left(k_x^*, \ell_x^*\right), \left(\partial\phi_y/\partial k_x^* < 0, \partial\phi_y/\partial \ell_x^* < 0\right)$$

Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

Σε κάθε σημείο της καμπύλης άριστων σημείων κατανομής θα ισχύει:

$$x^* = f_x\left(k_x^*, \ell_x^*\right) \quad \text{και} \quad y^* = f_y\left(k_y^*, \ell_y^*\right)$$

Δεδομένου ότι $\bar{k} = k_x + k_y$ και $\bar{\ell} = \ell_x + \ell_y$, ισχύει επίσης:

$$y^* = f_y\left(\bar{k} - k_x^*, \bar{\ell} - \ell_x^*\right) = \phi_y\left(k_x^*, \ell_x^*\right), \left(\partial\phi_y/\partial k_x^* < 0, \partial\phi_y/\partial \ell_x^* < 0\right)$$

Οι τιμές w και r όμως είναι δεδομένες, επομένως:

$$x^* = f_x\left(c\right) \;\; \text{και} \;\; y^* = f_y\left(c\right), \left(\partial f_x/\partial c > 0, \partial f_y/\partial c < 0\right) \tag{1}$$

όπου $c = rk_x^* + w\ell_x^*$.

Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

Σε κάθε σημείο της καμπύλης άριστων σημείων κατανομής θα ισχύει:

$$x^* = f_x\left(k_x^*, \ell_x^*\right) \quad \text{και} \quad y^* = f_y\left(k_y^*, \ell_y^*\right)$$

Δεδομένου ότι $\bar{k} = k_x + k_y$ και $\bar{\ell} = \ell_x + \ell_y$, ισχύει επίσης:

$$y^* = f_y\left(\bar{k} - k_x^*, \bar{\ell} - \ell_x^*\right) = \phi_y\left(k_x^*, \ell_x^*\right), \left(\partial\phi_y/\partial k_x^* < 0, \partial\phi_y/\partial\ell_x^* < 0\right)$$

Οι τιμές w και r όμως είναι δεδομένες, επομένως:

$$x^* = f_x\left(c\right) \;\; \text{και} \;\; y^* = f_y\left(c\right), \left(\partial f_x/\partial c > 0, \partial f_y/\partial c < 0\right) \tag{1}$$

όπου $c = rk_x^* + w\ell_x^*$. Χρησιμοποιώντας την (1) η καμπύλη άριστων σημείων κατανομής ορίζεται στον χώρο των εκροών ως:

$$T = F\left(x^*, y^*, c\right) = 0$$

Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

Σε κάθε σημείο της καμπύλης άριστων σημείων κατανομής θα ισχύει:

$$x^* = f_x\left(k_x^*, \ell_x^*\right) \quad \text{και} \quad y^* = f_y\left(k_y^*, \ell_y^*\right)$$

Δεδομένου ότι $\bar{k} = k_x + k_y$ και $\bar{\ell} = \ell_x + \ell_y$, ισχύει επίσης:

$$y^* = f_y\left(\bar{k} - k_x^*, \bar{\ell} - \ell_x^*\right) = \phi_y\left(k_x^*, \ell_x^*\right), \left(\partial \phi_y / \partial k_x^* < 0, \partial \phi_y / \partial \ell_x^* < 0\right)$$

Οι τιμές w και r όμως είναι δεδομένες, επομένως:

$$x^* = f_x\left(c\right) \;\; \text{και} \;\; y^* = f_y\left(c\right), \left(\partial f_x / \partial c > 0, \partial f_y / \partial c < 0\right) \tag{1}$$

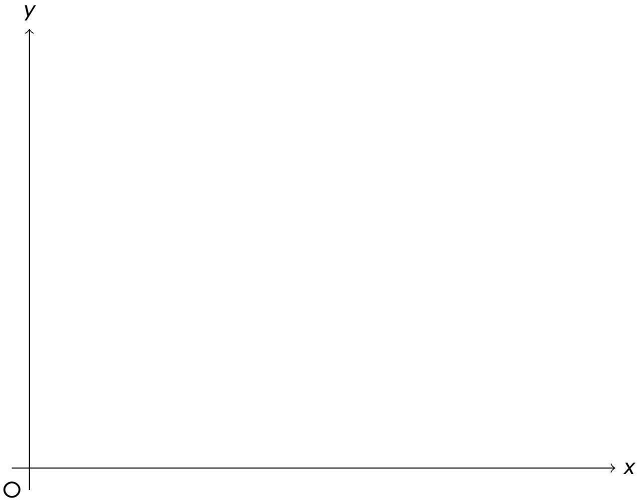
όπου $c = rk_x^* + w\ell_x^*$. Χρησιμοποιώντας την (1) η καμπύλη άριστων σημείων κατανομής ορίζεται στον χώρο των εκροών ως:

$$T = F\left(x^*, y^*, c\right) = 0$$

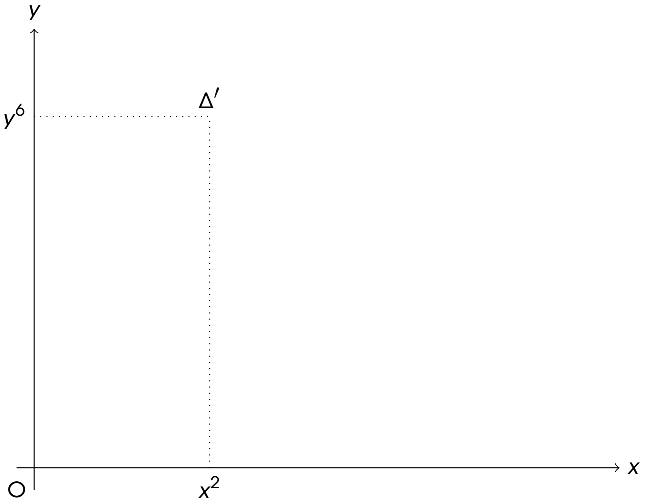
η οποία ονομάζεται καμπύλη μετασχηματισμού ή παραγωγικών δυνατοτήτων.

Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

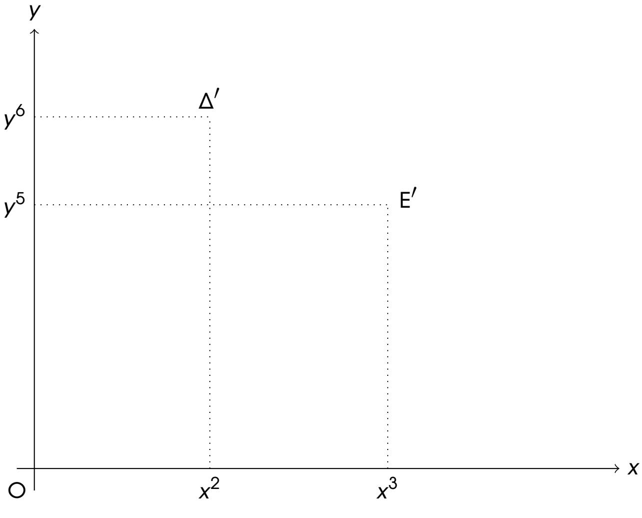
Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων



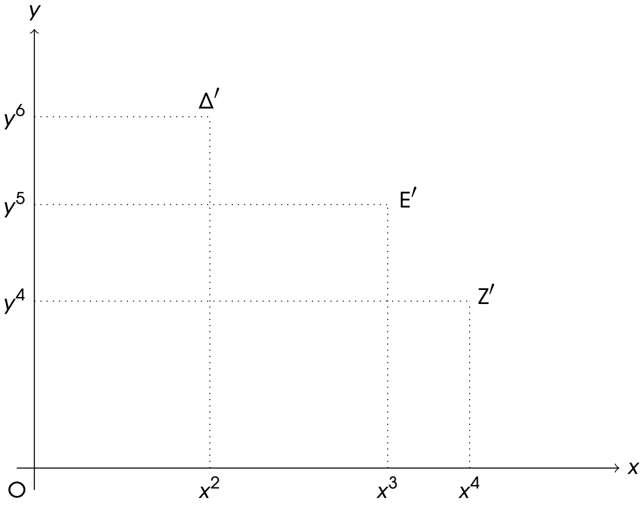
Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων



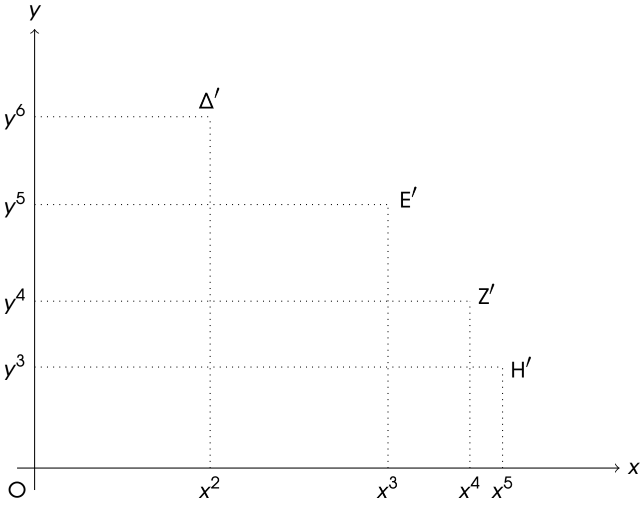
Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων



Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

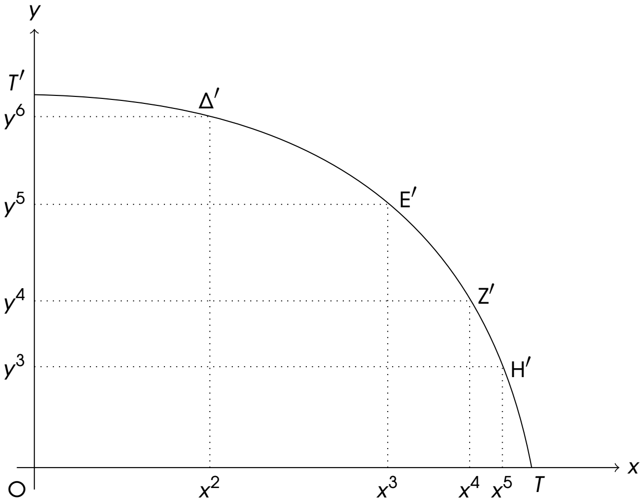


Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

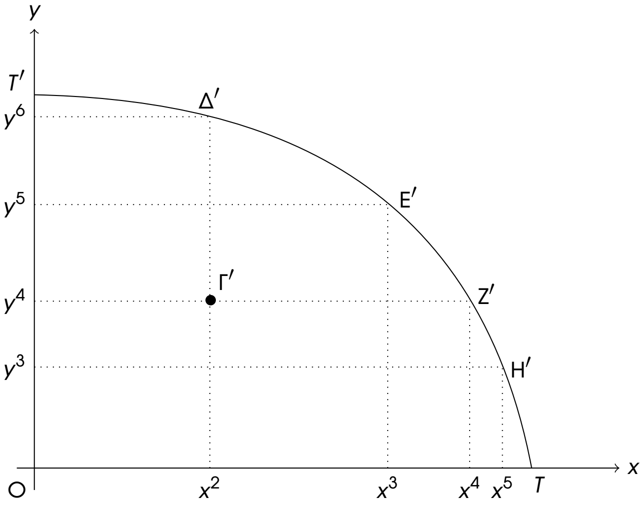


▸ factors

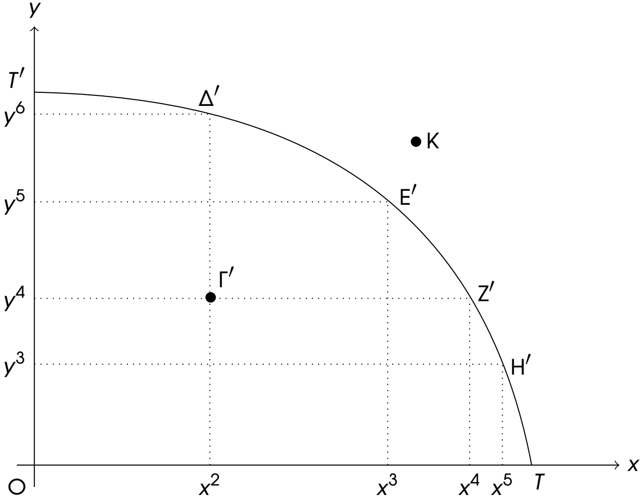
Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων



Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων



Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων



Κοιλότητα της ΚΠΔ

Η ΚΠΔ είναι κοίλη για τρείς λόγους:

Κοιλότητα της ΚΠΔ

Η ΚΠΔ είναι κοίλη για τρείς λόγους:

- Ύπαρξη φθίνουσων αποδόσεων στην κλίμακα στην παραγωγή και των δύο αγαθών

Κοιλότητα της ΚΠΔ

Η ΚΠΔ είναι κοίλη για τρείς λόγους:

- Ύπαρξη φθίνουσων αποδόσεων στην κλίμακα στην παραγωγή και των δύο αγαθών
- Η χρήση εξειδικευμένων εισροών στην παραγωγή των δύο αγαθών

Κοιλότητα της ΚΠΔ

Η ΚΠΔ είναι κοίλη για τρείς λόγους:

- Ύπαρξη φθίνουσων αποδόσεων στην κλίμακα στην παραγωγή και των δύο αγαθών
- Η χρήση εξειδικευμένων εισροών στην παραγωγή των δύο αγαθών
- Η ένταση στην χρήση των παραγωγικών συντελεστών (λόγος κεφαλαίου προς εργασία)

Κλίση της ΚΠΔ

Κλίση της ΚΠΔ

Η κλίση της ΚΠΔ είναι ίση με τον οριακό λόγο μετασχηματισμού:

$$MRT^{x,y} = -\frac{dy}{dx}$$

Κλίση της ΚΠΔ

Η κλίση της ΚΠΔ είναι ίση με τον οριακό λόγο μετασχηματισμού:

$$MRT^{x,y} = -\frac{dy}{dx}$$

δεδομένου ότι $dy/dx < 0 \Rightarrow MRT^{x,y} > 0$.

Κλίση της ΚΠΔ

Η κλίση της ΚΠΔ είναι ίση με τον οριακό λόγο μετασχηματισμού:

$$MRT^{x,y} = -\frac{dy}{dx}$$

δεδομένου ότι $dy/dx < 0 \Rightarrow MRT^{x,y} > 0$. Γνωρίζουμε ότι

$$MC_x = \frac{dc_x}{dx} \quad \text{και} \quad MC_y = \frac{dc_y}{dy}$$

Κλίση της ΚΠΔ

Η κλίση της ΚΠΔ είναι ίση με τον οριακό λόγο μετασχηματισμού:

$$MRT^{x,y} = -\frac{dy}{dx}$$

δεδομένου ότι $dy/dx < 0 \Rightarrow MRT^{x,y} > 0$. Γνωρίζουμε ότι

$$MC_x = \frac{dc_x}{dx} \quad \text{και} \quad MC_y = \frac{dc_y}{dy}$$

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{MC_x}{MC_y} = \frac{dc_x}{dc_y}\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Κλίση της ΚΠΔ

Η κλίση της ΚΠΔ είναι ίση με τον οριακό λόγο μετασχηματισμού:

$$MRT^{x,y} = -\frac{dy}{dx}$$

δεδομένου ότι $dy/dx < 0 \Rightarrow MRT^{x,y} > 0$. Γνωρίζουμε ότι

$$MC_x = \frac{dc_x}{dx} \quad \text{και} \quad MC_y = \frac{dc_y}{dy}$$

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{MC_x}{MC_y} = \frac{dc_x}{dc_y}\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Το συνολικό διαφορικό των συναρτήσεων κόστους ($c = w\ell + rk$) είναι ίσο με:

$$dc_x = wd\ell_x + rdk_x \;\; \text{και} \;\; dc_y = wd\ell_y + rdk_y$$

Κλίση της ΚΠΔ

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$dc_x = wd\ell_x + rdk_x$$
$$dc_y = wd\ell_y + rdk_y$$

Κλίση της ΚΠΔ

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} dc_x &= wd\ell_x + rdk_x \\ dc_y &= wd\ell_y + rdk_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dc_x}{dc_y} = \frac{wd\ell_x + rdk_x}{wd\ell_y + rdk_y} \tag{3}$$

Κλίση της ΚΠΔ

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} dc_x &= wd\ell_x + rdk_x \\ dc_y &= wd\ell_y + rdk_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dc_x}{dc_y} = \frac{wd\ell_x + rdk_x}{wd\ell_y + rdk_y} \tag{3}$$

Δεδομένου όμως ότι η κατανομή γίνεται με άριστο τρόπο θα ισχύει:

$$d\ell_x = -d\ell_y \quad \text{και} \quad dk_x = -dk_y$$

Κλίση της ΚΠΔ

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} dc_x &= wd\ell_x + rdk_x \\ dc_y &= wd\ell_y + rdk_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dc_x}{dc_y} = \frac{wd\ell_x + rdk_x}{wd\ell_y + rdk_y} \tag{3}$$

Δεδομένου όμως ότι η κατανομή γίνεται με άριστο τρόπο θα ισχύει:

$$d\ell_x = -d\ell_y \quad \text{και} \quad dk_x = -dk_y$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ισότητες στην πρώτη σχέση προκύπτει:

$$\frac{dc_x}{dc_y} = \frac{-\left(wd\ell_y + rdk_y\right)}{wd\ell_y + rdk_y} = -1 \tag{4}$$

Κλίση της ΚΠΔ

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} dc_x &= wd\ell_x + rdk_x \\ dc_y &= wd\ell_y + rdk_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dc_x}{dc_y} = \frac{wd\ell_x + rdk_x}{wd\ell_y + rdk_y} \tag{3}$$

Δεδομένου όμως ότι η κατανομή γίνεται με άριστο τρόπο θα ισχύει:

$$d\ell_x = -d\ell_y \quad \text{και} \quad dk_x = -dk_y$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ισότητες στην πρώτη σχέση προκύπτει:

$$\frac{dc_x}{dc_y} = \frac{-\left(wd\ell_y + rdk_y\right)}{wd\ell_y + rdk_y} = -1 \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας την (4), η σχέση (2) γινεται:

$$\frac{MC_x}{MC_y} = \frac{dc_x}{dc_y}\frac{dy}{dx}$$

Κλίση της ΚΠΔ

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} dc_x &= wd\ell_x + rdk_x \\ dc_y &= wd\ell_y + rdk_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dc_x}{dc_y} = \frac{wd\ell_x + rdk_x}{wd\ell_y + rdk_y} \tag{3}$$

Δεδομένου όμως ότι η κατανομή γίνεται με άριστο τρόπο θα ισχύει:

$$d\ell_x = -d\ell_y \quad \text{και} \quad dk_x = -dk_y$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ισότητες στην πρώτη σχέση προκύπτει:

$$\frac{dc_x}{dc_y} = \frac{-\left(wd\ell_y + rdk_y\right)}{wd\ell_y + rdk_y} = -1 \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας την (4), η σχέση (2) γινεται:

$$\frac{MC_x}{MC_y} = \frac{dc_x}{dc_y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{MC_x}{MC_y} = -1\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dx}$$

΄Αριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t. } T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t.} \quad T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathscr{L}\left(p_x, p_y, \lambda\right) = p_x x + p_y y + \lambda \left[T - F\left(x, y, \bar{c}\right)\right]$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t.} \quad T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathscr{L}\left(p_x, p_y, \lambda\right) = p_x x + p_y y + \lambda\left[T - F\left(x, y, \bar{c}\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t.} \quad T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathscr{L}\left(p_x, p_y, \lambda\right) = p_x x + p_y y + \lambda \left[T - F\left(x, y, \bar{c}\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t.} \quad T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathscr{L}\left(p_x, p_y, \lambda\right) = p_x x + p_y y + \lambda\left[T - F\left(x, y, \bar{c}\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x - \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t.} \quad T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathscr{L}\left(p_x, p_y, \lambda\right) = p_x x + p_y y + \lambda\left[T - F\left(x, y, \bar{c}\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x - \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \tag{5}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t.} \quad T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathscr{L}\left(p_x, p_y, \lambda\right) = p_x x + p_y y + \lambda\left[T - F\left(x, y, \bar{c}\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x - \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y - \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0\text{ffl} \Rightarrow p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \tag{6}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t. } T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathscr{L}\left(p_x, p_y, \lambda\right) = p_x x + p_y y + \lambda\left[T - F\left(x, y, \bar{c}\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \quad &\Rightarrow \quad p_x - \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \qquad (5) \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad &\Rightarrow \quad p_y - \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ffl} \Rightarrow p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \qquad (6) \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 & \end{aligned}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Με δεδομένες τις τιμές των x και y, η οικονομία μεγιστοποιεί την συνολική της πρόσοδο:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} R &= p_x x + p_y y \\ \text{s.t.} \quad T &= F\left(x, y, \bar{c}\right) \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathscr{L}\left(p_x, p_y, \lambda\right) = p_x x + p_y y + \lambda\left[T - F\left(x, y, \bar{c}\right)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x - \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = \lambda\frac{\partial F}{\partial x} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y - \lambda\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{0ffl} \Rightarrow p_y = \lambda\frac{\partial F}{\partial y} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - F\left(x, y, \bar{c}\right) = 0$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}$$
$$p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{array}{l} p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{array}{l} p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \lambda \tfrac{\partial F}{\partial x} \\ p_y &= \lambda \tfrac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = MRT^{x,y} \tag{7}$$

που αποτελεί και την συνθήκη αριστοποίησης.

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{array}{l} p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = MRT^{x,y} \tag{7}$$

που αποτελεί και την συνθήκη αριστοποίησης. Εναλλακτικά,

$$\frac{1}{MC_x}$$

ʼΆριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{matrix} p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = MRT^{x,y} \tag{7}$$

που αποτελεί και την συνθήκη αριστοποίησης. Εναλλακτικά,

$$\frac{1}{MC_x} = \frac{1}{dc_x / dx}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{array}{l} p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = MRT^{x,y} \qquad (7)$$

που αποτελεί και την συνθήκη αριστοποίησης. Εναλλακτικά,

$$\frac{1}{MC_x} = \frac{1}{dc_x / dx} = \frac{dx}{dc_x} = MP_x$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{array}{l} p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = MRT^{x,y} \qquad (7)$$

που αποτελεί και την συνθήκη αριστοποίησης. Εναλλακτικά,

$$\frac{1}{MC_x} = \frac{1}{dc_x / dx} = \frac{dx}{dc_x} = MP_x$$

και

$$\frac{1}{MC_y} = \frac{1}{dc_y / dy} = \frac{dy}{dc_y} = MP_y$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{array}{l} p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = MRT^{x,y} \qquad (7)$$

που αποτελεί και την συνθήκη αριστοποίησης. Εναλλακτικά,

$$\frac{1}{MC_x} = \frac{1}{dc_x / dx} = \frac{dx}{dc_x} = MP_x$$

και

$$\frac{1}{MC_y} = \frac{1}{dc_y \big/ dy} = \frac{dy}{dc_y} = MP_y$$

Με βάση τις παραπάνω η συνθήκη στην (7) γίνεται:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y}$$

Άριστος Συνδυασμός Παραγωγής

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$\left.\begin{array}{l} p_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ p_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = MRT^{x,y} \tag{7}$$

που αποτελεί και την συνθήκη αριστοποίησης. Εναλλακτικά,

$$\frac{1}{MC_x} = \frac{1}{dc_x / dx} = \frac{dx}{dc_x} = MP_x$$

και

$$\frac{1}{MC_y} = \frac{1}{dc_y \big/ dy} = \frac{dy}{dc_y} = MP_y$$

Με βάση τις παραπάνω η συνθήκη στην (7) γίνεται:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{MC_x}{MC_y} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{MP_y}{MP_x}$$

Υποθέσεις του Υποδείγματος

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, x και y

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, x και y
- η προσφερόμενη ποσότητα κάθε αγαθού είναι δεδομένη, ομοιογενής και πλήρως διαιρετή

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, x και y
- η προσφερόμενη ποσότητα κάθε αγαθού είναι δεδομένη, ομοιογενής και πλήρως διαιρετή
- οι αγορές των δύο αγαθών είναι ανταγωνιστικές

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, x και y
- η προσφερόμενη ποσότητα κάθε αγαθού είναι δεδομένη, ομοιογενής και πλήρως διαιρετή
- οι αγορές των δύο αγαθών είναι ανταγωνιστικές
- δύο καταναλωτές, τους A και B, με συγκεκριμένες προτιμήσεις

Υποθέσεις του Υποδείγματος

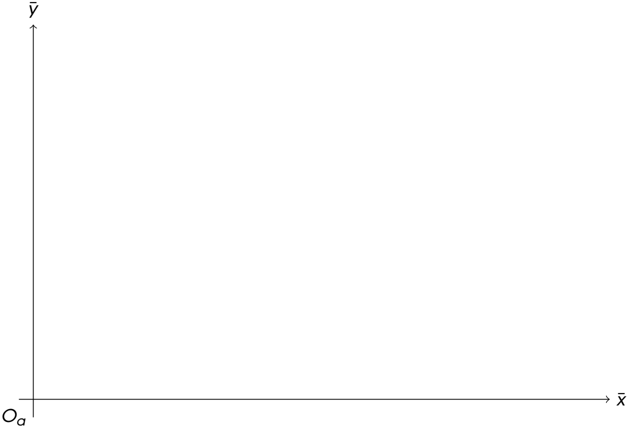
- δύο αγαθά, x και y
- η προσφερόμενη ποσότητα κάθε αγαθού είναι δεδομένη, ομοιογενής και πλήρως διαιρετή
- οι αγορές των δύο αγαθών είναι ανταγωνιστικές
- δύο καταναλωτές, τους A και B, με συγκεκριμένες προτιμήσεις
- οι οριακές χρησιμότητες των A και B είναι θετικές και φθίνουσες και για τα δύο αγαθά

Υποθέσεις του Υποδείγματος

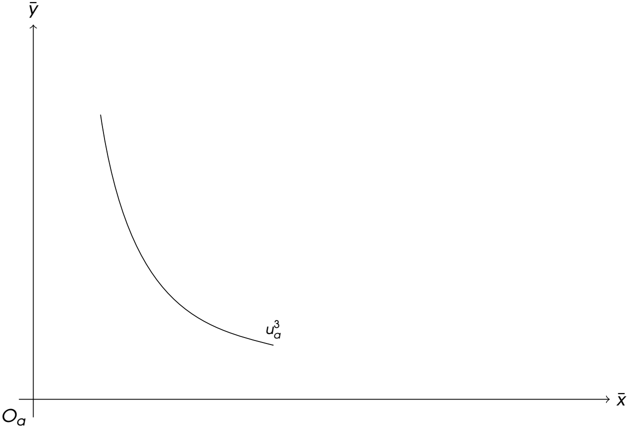
- δύο αγαθά, x και y
- η προσφερόμενη ποσότητα κάθε αγαθού είναι δεδομένη, ομοιογενής και πλήρως διαιρετή
- οι αγορές των δύο αγαθών είναι ανταγωνιστικές
- δύο καταναλωτές, τους A και B, με συγκεκριμένες προτιμήσεις
- οι οριακές χρησιμότητες των A και B είναι θετικές και φθίνουσες και για τα δύο αγαθά
- δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις στην κατανάλωση

Διαγραμματική Ανάλυση

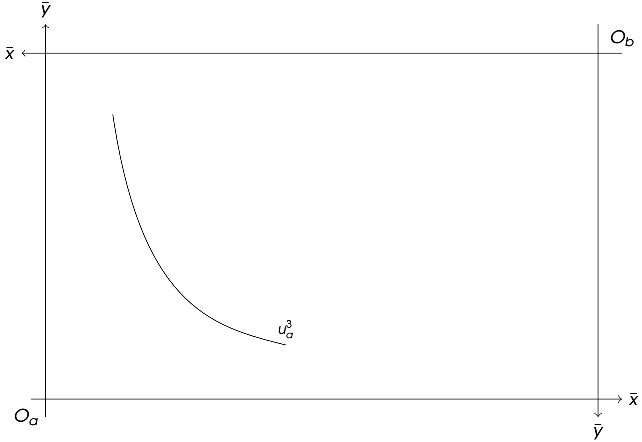
Διαγραμματική Ανάλυση



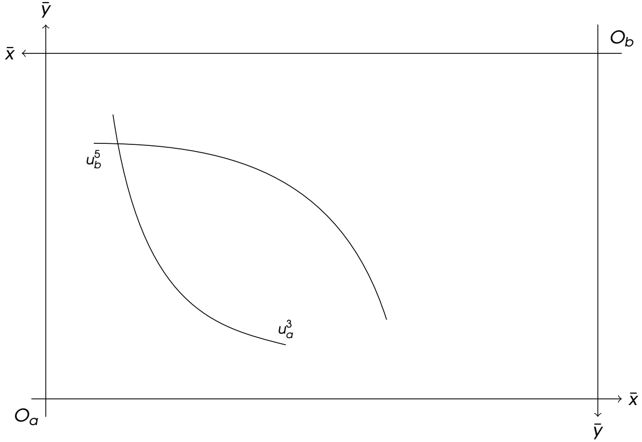
Διαγραμματική Ανάλυση



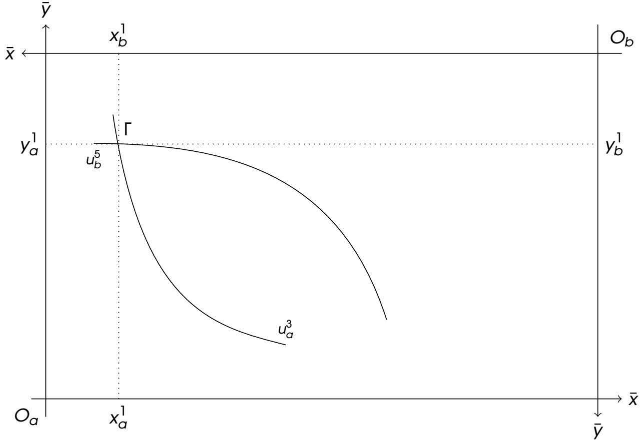
Διαγραμματική Ανάλυση



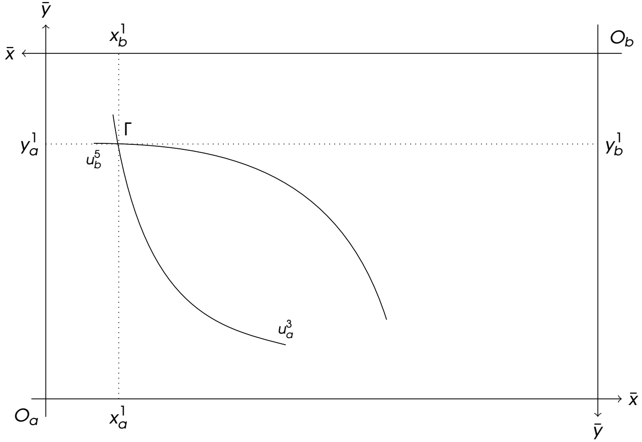
Διαγραμματική Ανάλυση



Διαγραμματική Ανάλυση



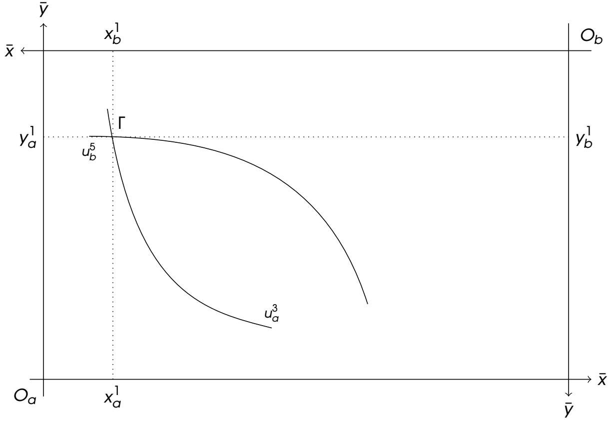
Διαγραμματική Ανάλυση



$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$

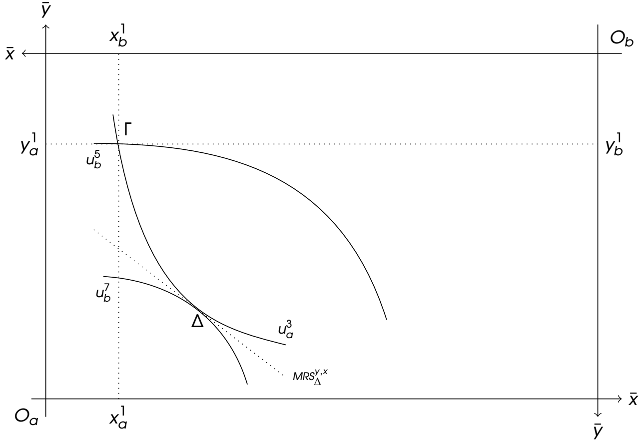


$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

example

Διαγραμματική Ανάλυση

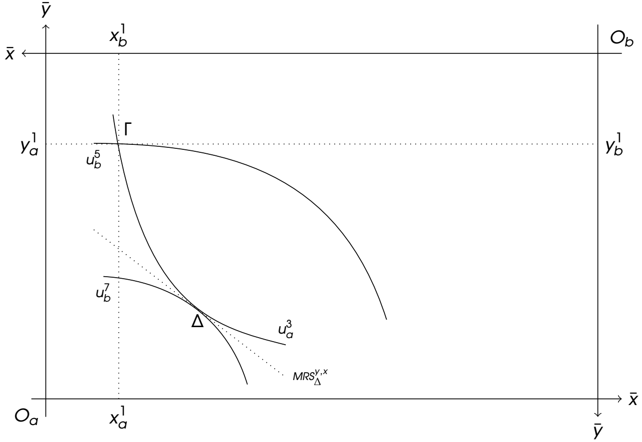
Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$



$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

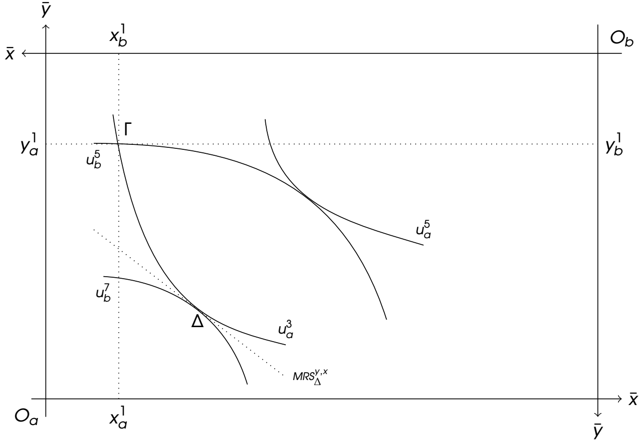
Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$ Δ: $MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$



$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

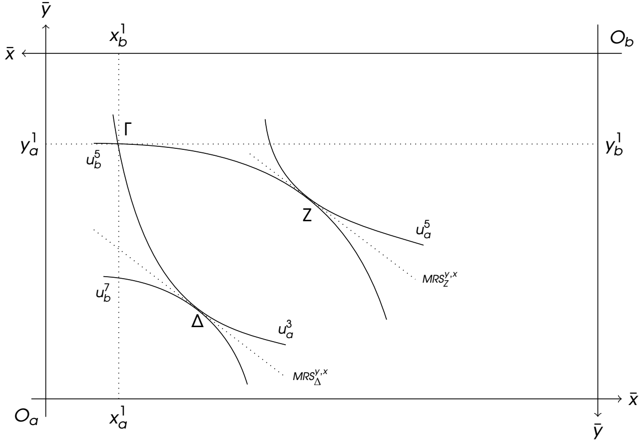
Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$ Δ: $MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$



$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

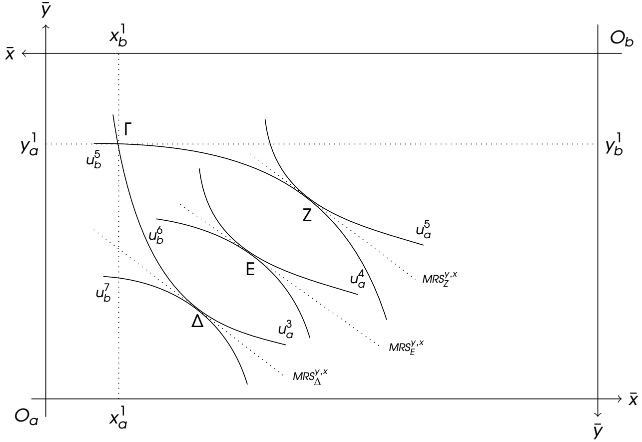
Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$ Δ: $MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$



$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

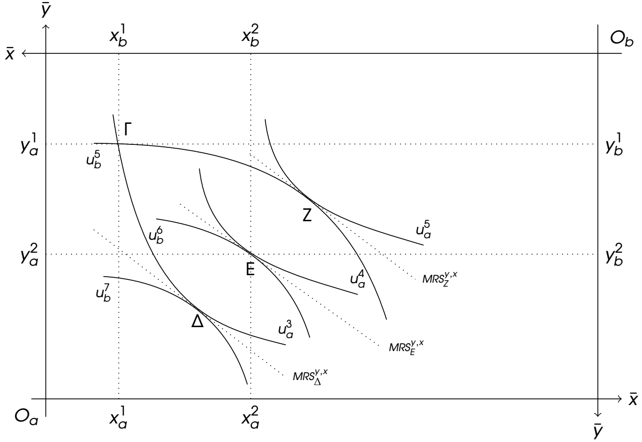
Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$ Δ: $MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$



$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

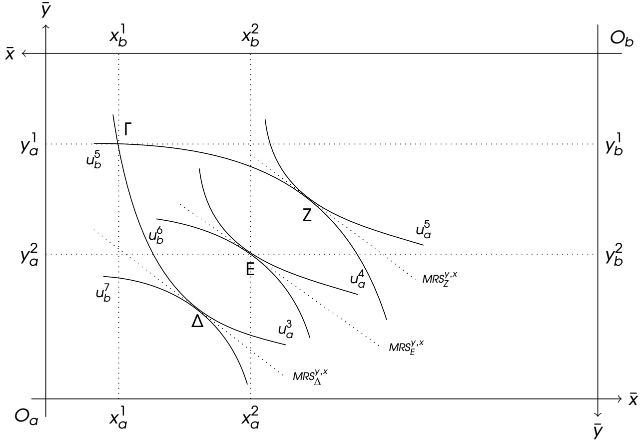
Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$ Δ: $MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$



$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$ Δ: $MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$

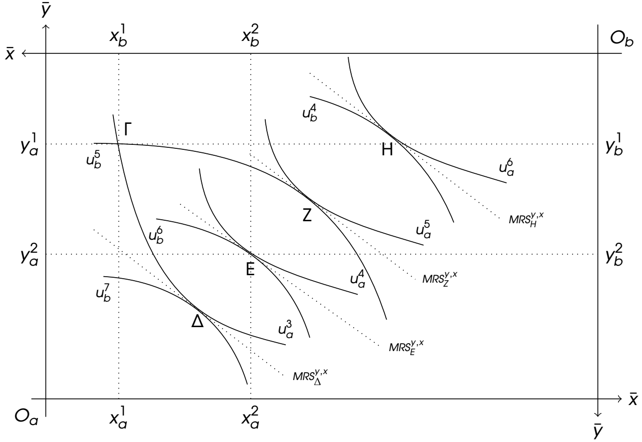


$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

$$O_a x_a^2 + O_b x_b^2 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^2 + O_b y_b^2 = \bar{y}$$

Διαγραμματική Ανάλυση

Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$ Δ: $MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$

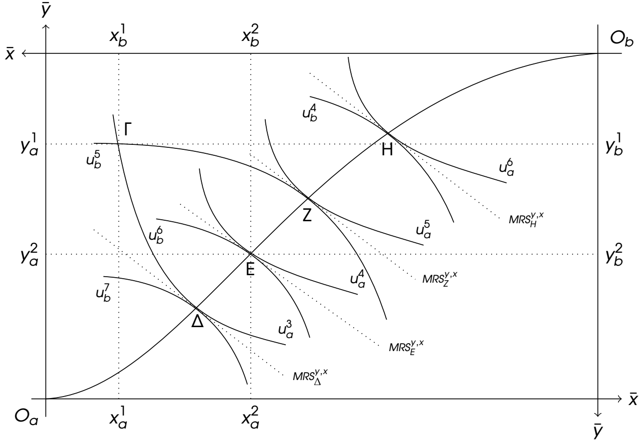


$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$
$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$

$O_a x_a^2 + O_b x_b^2 = \bar{x}$
$O_a y_a^2 + O_b y_b^2 = \bar{y}$

Διαγραμματική Ανάλυση

Γ: $MRS_a^{y,x} > MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} > \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$ Δ: $MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$



$$O_a x_a^1 + O_b x_b^1 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^1 + O_b y_b^1 = \bar{y}$$

$$O_a x_a^2 + O_b x_b^2 = \bar{x}$$
$$O_a y_a^2 + O_b y_b^2 = \bar{y}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Αλγεβρική Ανάλυση

Έστω οι συναρτήσεις χρησιμότητας των δύο καταναλωτών:

$$
\begin{aligned}
u_a &= f_a\left(x_a, y_a\right) \\
u_b &= f_b\left(x_b, y_b\right)
\end{aligned}
$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Έστω οι συναρτήσεις χρησιμότητας των δύο καταναλωτών:

$$\begin{aligned} u_a &= f_a\left(x_a, y_a\right) \\ u_b &= f_b\left(x_b, y_b\right) \end{aligned}$$

για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_a} > 0, \;\; \frac{\partial f_a}{\partial y_a} > 0, \;\; \frac{\partial^2 f_a}{\partial x_a^2} \leq 0, \;\; \frac{\partial^2 f_a}{\partial y_a^2} \leq 0$$
$$\frac{\partial f_b}{\partial x_b} > 0, \;\; \frac{\partial f_b}{\partial y_b} > 0, \;\; \frac{\partial^2 f_b}{\partial x_b^2} \leq 0, \;\; \frac{\partial^2 f_b}{\partial y_b^2} \leq 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Έστω οι συναρτήσεις χρησιμότητας των δύο καταναλωτών:

$$\begin{aligned} u_a &= f_a\left(x_a, y_a\right) \\ u_b &= f_b\left(x_b, y_b\right) \end{aligned}$$

για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial x_a} > 0, \ \ \frac{\partial f_a}{\partial y_a} > 0, \ \ \frac{\partial^2 f_a}{\partial x_a^2} \leq 0, \ \ \frac{\partial^2 f_a}{\partial y_a^2} \leq 0 \\ \frac{\partial f_b}{\partial x_b} > 0, \ \ \frac{\partial f_b}{\partial y_b} > 0, \ \ \frac{\partial^2 f_b}{\partial x_b^2} \leq 0, \ \ \frac{\partial^2 f_b}{\partial y_b^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Επιπλέον, και τα δύο αγαθά καταναλώνονται εξολοκλήρου απο τους δύο καταναλωτές:

$$\bar{x} = x_a + x_b \quad \text{και} \quad \bar{y} = y_a + y_b$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η αποτελεσματική διανομή των δύο αγαθών επιτυγχάνεται μεγιστοποιώντας το επίπεδο χρησιμότητας του ενός καταναλωτή με δεδομένο το επίπεδο χρησιμότητας του άλλου και τις προσφερόμενες ποσότητες τους.

Αλγεβρική Ανάλυση

Η αποτελεσματική διανομή των δύο αγαθών επιτυγχάνεται μεγιστοποιώντας το επίπεδο χρησιμότητας του ενός καταναλωτή με δεδομένο το επίπεδο χρησιμότητας του άλλου και τις προσφερόμενες ποσότητες τους. Δηλαδή,

$$
\begin{aligned}
\max_{x_a, y_a} u_a &= f_a\left(x_a, y_a\right) \\
\text{s.t. } \bar{u}_b &= f_b\left(x_b, y_b\right) \\
\bar{x} &= x_a + x_b \\
\bar{y} &= y_a + y_b
\end{aligned}
$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η αποτελεσματική διανομή των δύο αγαθών επιτυγχάνεται μεγιστοποιώντας το επίπεδο χρησιμότητας του ενός καταναλωτή με δεδομένο το επίπεδο χρησιμότητας του άλλου και τις προσφερόμενες ποσότητες τους. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \max_{x_a, y_a} u_a &= f_a(x_a, y_a) \\ \text{s.t. } \bar{u}_b &= f_b(x_b, y_b) \\ \bar{x} &= x_a + x_b \\ \bar{y} &= y_a + y_b \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος, ενσωματόνοντας τους δύο τελευταίους περιορισμούς στον πρώτο, έχει ως εξής:

$$\mathscr{L}(x_a, y_a, \lambda) = f_a(x_a, y_a) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a)\right]$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(x_a, y_a, \lambda) = f_a(x_a, y_a) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \tag{8}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \qquad (8) \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial y_a} = 0
\end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης :

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = -\lambda MU_b^y \tag{9}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης :

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = -\lambda MU_b^y \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = -\lambda MU_b^y \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right) = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = -\lambda MU_b^y \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right) = 0$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (8) με την (9) προκύπτει

$$\begin{aligned} MU_a^x &= -\lambda MU_b^x \\ MU_a^y &= -\lambda MU_b^y \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = -\lambda MU_b^y \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right) = 0$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (8) με την (9) προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^x = -\lambda MU_b^x \\ MU_a^y = -\lambda MU_b^y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = -\lambda MU_b^y \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right) = 0$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (8) με την (9) προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^x = -\lambda MU_b^x \\ MU_a^y = -\lambda MU_b^y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y} \Rightarrow \boxed{MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}\left(x_a, y_a, \lambda\right) = f_a\left(x_a, y_a\right) + \lambda\left[\bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right)\right]$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial x_b}\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = -\lambda MU_b^x \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda \frac{\partial f_b}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = -\lambda MU_b^y \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_b - f_b\left(\bar{x} - x_a, \bar{y} - y_a\right) = 0$$

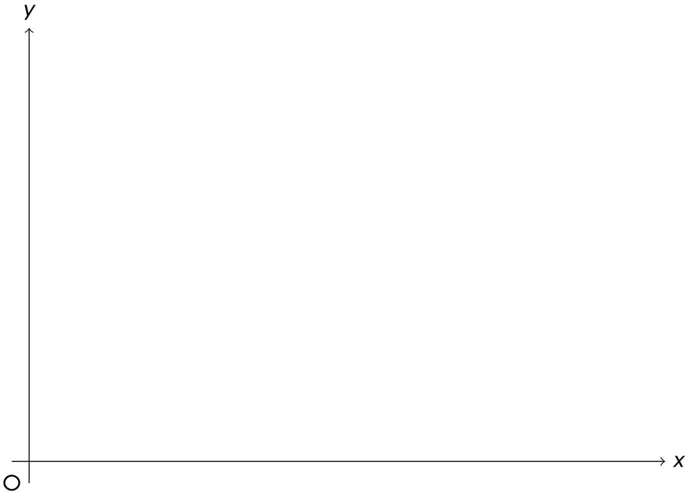
Διαιρώντας κατά μέλη την (8) με την (9) προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^x = -\lambda MU_b^x \\ MU_a^y = -\lambda MU_b^y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y} \Rightarrow \boxed{MRS_a^{y,x} = MRS_b^{y,x}}$$

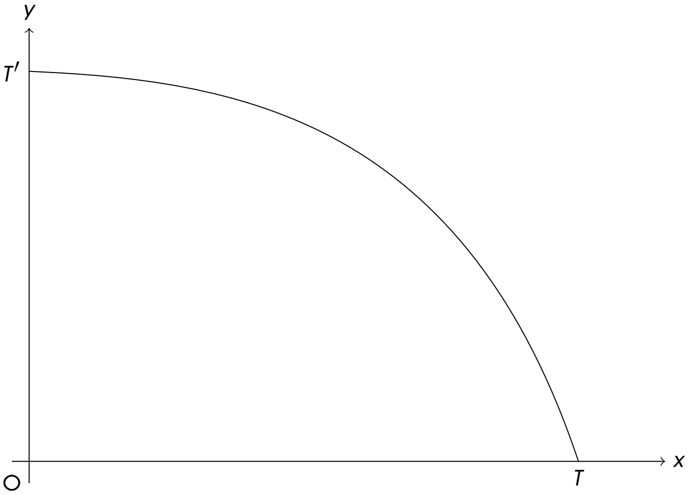
που αποτελεί και την δεύτερη κατά Pareto συνθήκη ισορροπίας

Διαγραμματική Ανάλυση

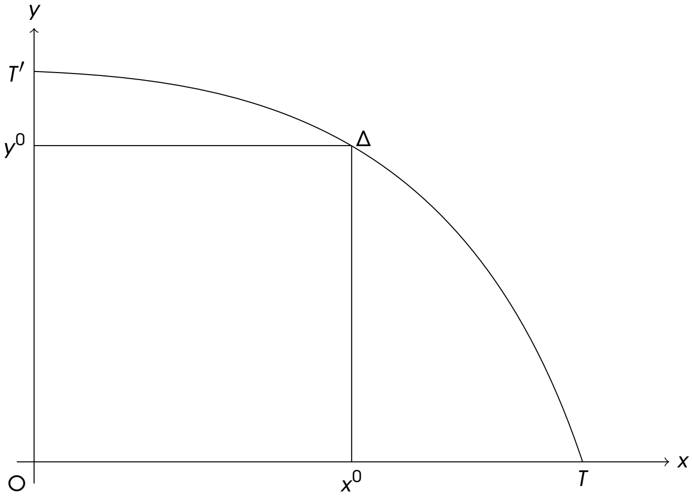
Διαγραμματική Ανάλυση



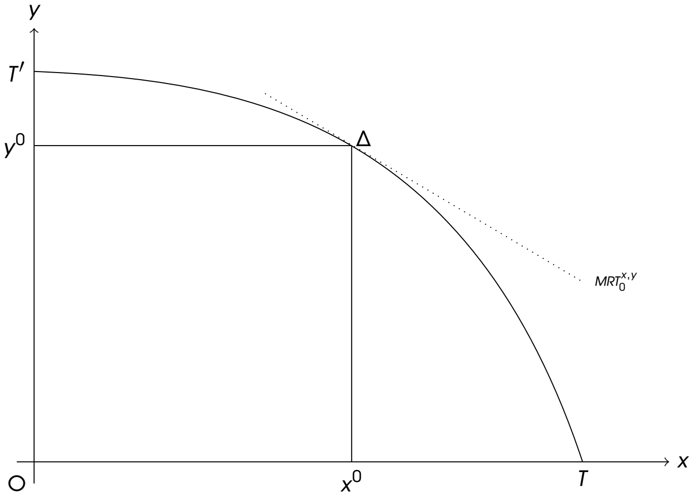
Διαγραμματική Ανάλυση



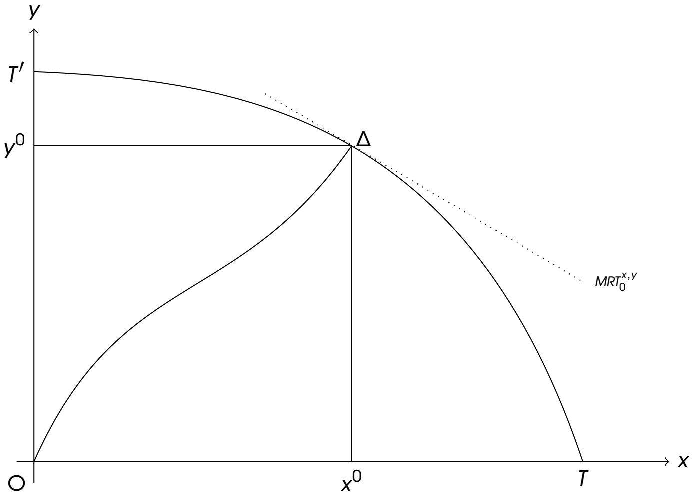
Διαγραμματική Ανάλυση



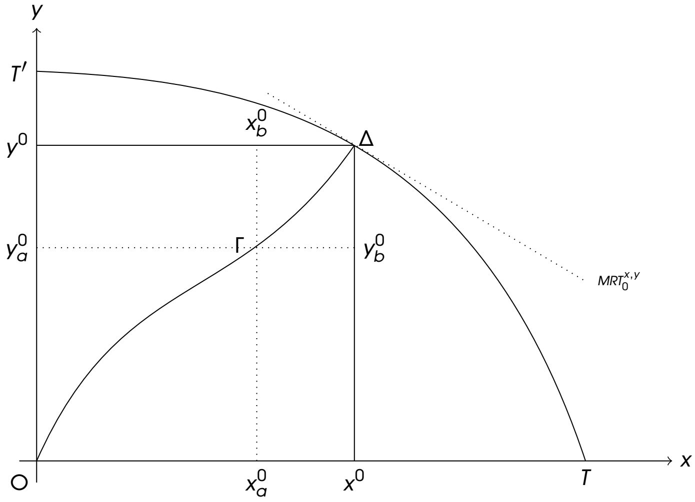
Διαγραμματική Ανάλυση



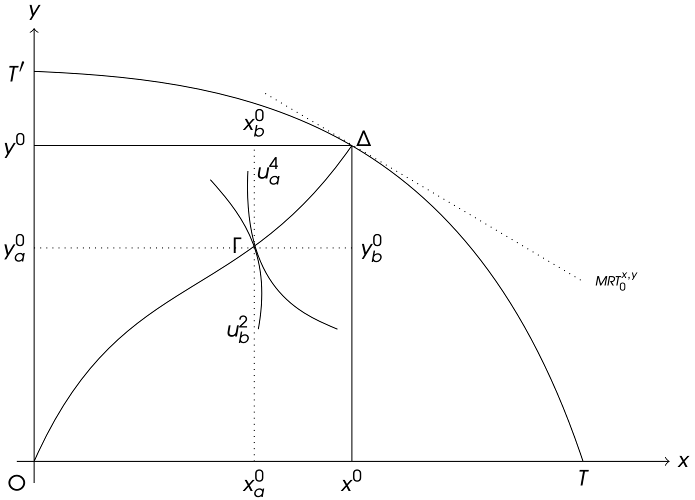
Διαγραμματική Ανάλυση



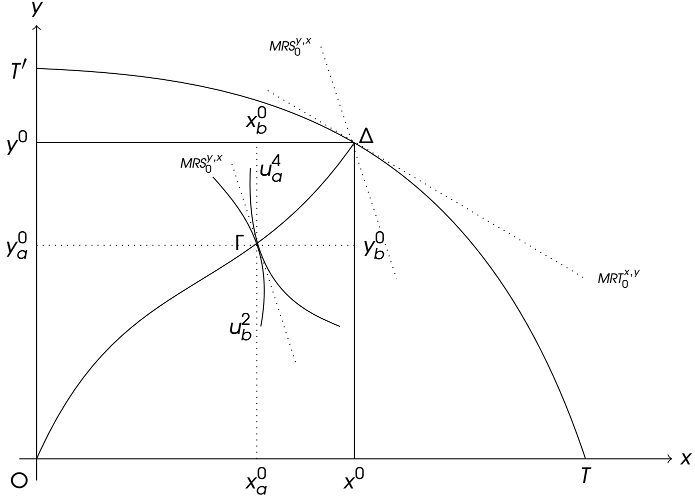
Διαγραμματική Ανάλυση



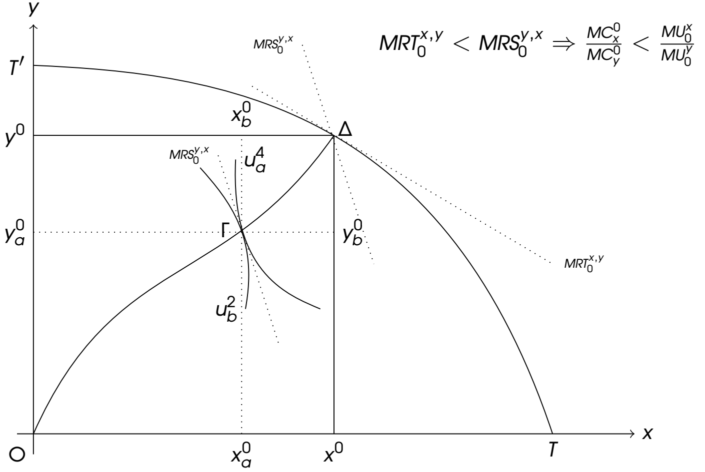
Διαγραμματική Ανάλυση



Διαγραμματική Ανάλυση



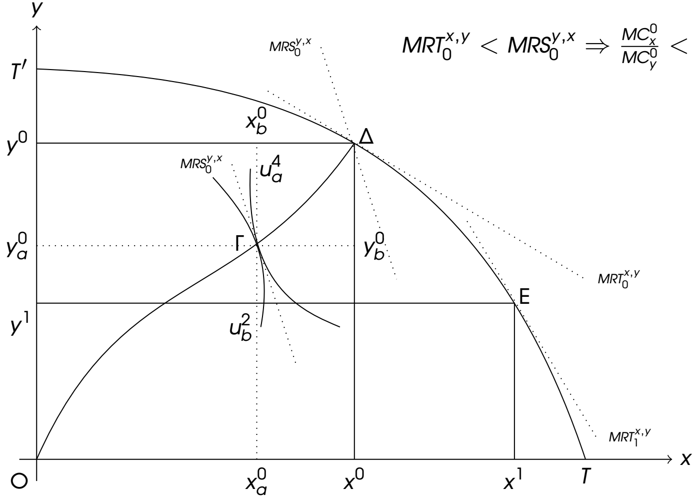
Διαγραμματική Ανάλυση



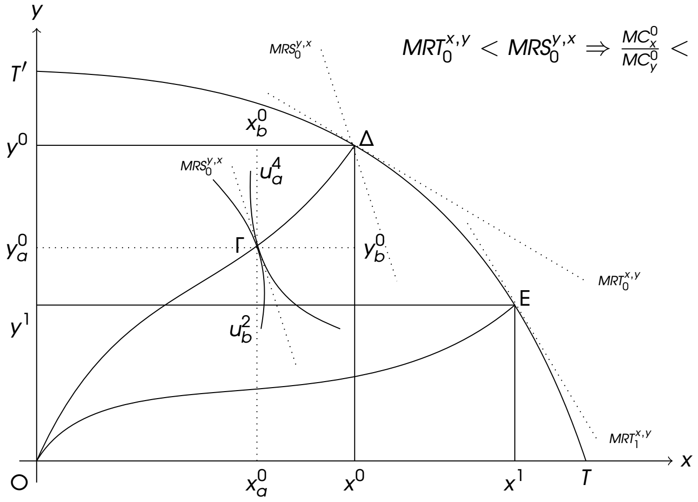
example

Διαγραμματική Ανάλυση

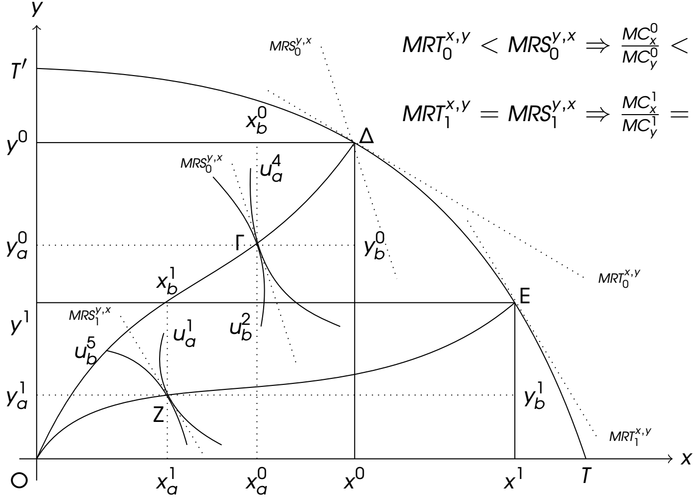
$$MRT_0^{x,y} < MRS_0^{y,x} \Rightarrow \frac{MC_x^0}{MC_y^0} < \frac{MU_0^x}{MU_0^y}$$



Διαγραμματική Ανάλυση



Διαγραμματική Ανάλυση



$$MRT_0^{x,y} < MRS_0^{y,x} \Rightarrow \frac{MC_x^0}{MC_y^0} < \frac{MU_0^x}{MU_0^y}$$

$$MRT_1^{x,y} = MRS_1^{y,x} \Rightarrow \frac{MC_x^1}{MC_y^1} = \frac{MU_1^x}{MU_1^y}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Αλγεβρική Ανάλυση

Οι συναρτήσεις χρησιμότητας των A και B:

$$\begin{aligned} u_a &= f_a\left(x_a, y_a, k_a, \ell_a\right) \\ u_b &= f_b\left(x_b, y_b, k_b, \ell_b\right) \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Οι συναρτήσεις χρησιμότητας των A και B:

$$\begin{aligned} u_a &= f_a\left(x_a, y_a, k_a, \ell_a\right) \\ u_b &= f_b\left(x_b, y_b, k_b, \ell_b\right) \end{aligned}$$

Οι ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= k_a + k_b \\ \bar{\ell} &= \ell_a + \ell_b \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Οι συναρτήσεις χρησιμότητας των A και B:

$$\begin{aligned} u_a &= f_a\left(x_a, y_a, k_a, \ell_a\right) \\ u_b &= f_b\left(x_b, y_b, k_b, \ell_b\right) \end{aligned}$$

Οι ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= k_a + k_b \\ \bar{\ell} &= \ell_a + \ell_b \end{aligned}$$

Η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών:

$$T = F\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}, \bar{\ell}\right)$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Οι συναρτήσεις χρησιμότητας των A και B:

$$\begin{aligned} u_a &= f_a\left(x_a, y_a, k_a, \ell_a\right) \\ u_b &= f_b\left(x_b, y_b, k_b, \ell_b\right) \end{aligned}$$

Οι ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= k_a + k_b \\ \bar{\ell} &= \ell_a + \ell_b \end{aligned}$$

Η τεχνολογία παραγωγής των δύο αγαθών:

$$T = F\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}, \bar{\ell}\right)$$

Προσφορά των αγαθών:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_a + x_b \\ \bar{y} &= y_a + y_b \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Το πρόβλημα αριστοποίησης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
\max_{x_a, y_a, k_a, \ell_a, x_b, y_b, k_b, \ell_b} u_a &= f_a\left(x_a, y_a, k_a, \ell_a\right) \\
\text{s.t. } \bar{u}_b &= f_b\left(x_b, y_b, k_b, \ell_b\right) \\
T &= F\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}, \bar{\ell}\right) \\
\bar{x} &= x_a + x_b \\
\bar{y} &= y_a + y_b \\
\bar{k} &= k_a + k_b \\
\bar{\ell} &= \ell_a + \ell_b
\end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Το πρόβλημα αριστοποίησης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
\max_{x_a, y_a, k_a, \ell_a, x_b, y_b, k_b, \ell_b} u_a &= f_a\left(x_a, y_a, k_a, \ell_a\right) \\
\text{s.t. } \bar{u}_b &= f_b\left(x_b, y_b, k_b, \ell_b\right) \\
T &= F\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}, \bar{\ell}\right) \\
\bar{x} &= x_a + x_b \\
\bar{y} &= y_a + y_b \\
\bar{k} &= k_a + k_b \\
\bar{\ell} &= \ell_a + \ell_b
\end{aligned}$$

ή ενσωματώνοντας τους τέσσερις τελευταίους περιορισμούς στον τρίτο:

$$\begin{aligned}
\max_{x_a, y_a, k_a, \ell_a, x_b, y_b, k_b, \ell_b} u_a &= f_a\left(x_a, y_a, k_a, \ell_a\right) \\
\text{s.t. } \bar{u}_b &= f_b\left(x_b, y_b, k_b, \ell_b\right) \\
T &= F\left(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b\right)
\end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος :

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λαγγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 [\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)] + \\ \lambda_2 [T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1\left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2\left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 [\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)] + \lambda_2 [T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1\left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2\left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial k_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial k_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_a} = 0 \Rightarrow MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \tag{12}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1\left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2\left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial k_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_a} = 0 \Rightarrow MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1\left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2\left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial k_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_a} = 0 \Rightarrow MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial \ell_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_a} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial k_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_a} = 0 \Rightarrow MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial \ell_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_a} = 0 \Rightarrow MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \tag{13}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial k_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_a} = 0 \Rightarrow MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial \ell_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_a} = 0 \Rightarrow MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_b} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial k_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_a} = 0 \Rightarrow MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial \ell_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_a} = 0 \Rightarrow MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial x_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_b} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Η λανγκρανζιανή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1\left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2\left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για άριστο απαιτούν όπως:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_a} = 0 \Rightarrow MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial y_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_a} = 0 \Rightarrow MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial k_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_a} = 0 \Rightarrow MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_a}{\partial \ell_a} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_a} = 0 \Rightarrow MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial x_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \tag{14}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1\left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2\left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \quad (16)$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_b} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial \ell_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_b} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial \ell_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \quad (17)$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathcal{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial \ell_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial \ell_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b) = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1 \left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \\ \lambda_2 \left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial \ell_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b) = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

$$\mathscr{L}(\cdot) = f_a(x_a, y_a, k_a, \ell_a) + \lambda_1\left[\bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b)\right] + \lambda_2\left[T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial y_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial k_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{\partial f_b}{\partial \ell_b} - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial \ell_b} = 0 \Rightarrow \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_b - f_b(x_b, y_b, k_b, \ell_b) = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - F(x_a + x_b, y_a + y_b, k_a + k_b, \ell_a + \ell_b) = 0$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (10) με την (11),

$$MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}$$
$$MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (10) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (10) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

την (14) με την (15),

$$\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (10) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

την (14) με την (15),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^x}{MU_b^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (10) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

την (14) με την (15),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^x}{MU_b^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (10) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

την (14) με την (15),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^x}{MU_b^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^x}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{MU_b^x}{MU_b^y} \Rightarrow \boxed{MRS_a^{y,x} = MRT^{x,y} = MRS_b^{y,x}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (13),

$$MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}}$$
$$MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (13),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (13),

$$\left.\begin{aligned} MU_a^k &= \lambda_2 \tfrac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^\ell &= \lambda_2 \tfrac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (17),

$$\begin{aligned} \lambda_1 MU_b^k &= -\lambda_2 \tfrac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^\ell &= -\lambda_2 \tfrac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{aligned}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (13),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (17),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (13),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (17),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^k}{MU_a^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}} = \frac{MU_b^k}{MU_b^\ell}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (13),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (17),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^k}{MU_a^\ell} = \frac{d\bar{\ell}}{d\bar{k}} = \frac{MU_b^k}{MU_b^\ell} \Rightarrow \boxed{MRS_a^{\ell,k} = MRTS^{\bar{k},\bar{\ell}} = MRS_b^{\ell,k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (10),

$$MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}}$$
$$MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (10),

$$\left.\begin{aligned} MU_a^k = \lambda_2 \tfrac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^x = \lambda_2 \tfrac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (10),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (14),

$$\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (10),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (14),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (10),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (14),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^k}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}} = \frac{MU_b^k}{MU_b^x}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (10),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (14),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^k}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{k}} = \frac{MU_b^k}{MU_b^x} \Rightarrow \boxed{MRS_a^{x,k} = MP_x^k = MRS_b^{x,k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (11),

$$MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}}$$
$$MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (11),

$$\left.\begin{aligned} MU_a^k &= \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^y &= \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (15),

$$\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (11),

$$\left.\begin{matrix} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (15),

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (15),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^k}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}} = \frac{MU_b^k}{MU_b^y}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (12) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^k = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^k}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}}$$

την (16) με την (15),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^k = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{k}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^k}{MU_b^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^k}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{k}} = \frac{MU_b^k}{MU_b^y} \Rightarrow \boxed{MRS_a^{y,k} = MP_y^k = MRS_b^{y,k}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (10),

$$MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}}$$
$$MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (10),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^{\ell} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^{x} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{x}} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (10),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^{\ell} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^{x} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{x}} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}}$$

την (17) με την (14),

$$\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^{\ell} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ \lambda_1 MU_b^{x} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (10),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^{\ell} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^{x} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{x}} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}}$$

την (17) με την (14),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^{\ell} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ \lambda_1 MU_b^{x} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^{\ell}}{MU_b^{x}} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (10),

$$\left.\begin{matrix} MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}}$$

την (17) με την (14),

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^\ell}{MU_b^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}} = \frac{MU_b^\ell}{MU_b^x}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (10),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^x = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}}$$

την (17) με την (14),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ \lambda_1 MU_b^x = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^\ell}{MU_b^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^\ell}{MU_a^x} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\ell}} = \frac{MU_b^\ell}{MU_b^x} \Rightarrow \boxed{MRS_a^{x,\ell} = MP_x^\ell = MRS_b^{x,\ell}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (11),

$$MU_a^{\ell} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}}$$
$$MU_a^{y} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^{\ell} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^{y} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^\ell = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^y = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^\ell}{MU_a^y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}}$$

την (17) με την (15),

$$\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^\ell = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ \lambda_1 MU_b^y = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^{\ell} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^{y} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}}$$

την (17) με την (15),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^{\ell} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ \lambda_1 MU_b^{y} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^{\ell}}{MU_b^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^{\ell} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^{y} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}}$$

την (17) με την (15),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^{\ell} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ \lambda_1 MU_b^{y} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^{\ell}}{MU_b^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}} = \frac{MU_b^{\ell}}{MU_b^{y}}$$

Αλγεβρική Ανάλυση

Διαιρώντας κατά μέλη την (13) με την (11),

$$\left.\begin{array}{l} MU_a^{\ell} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ MU_a^{y} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}}$$

την (17) με την (15),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 MU_b^{\ell} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\ell}} \\ \lambda_1 MU_b^{y} = -\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MU_b^{\ell}}{MU_b^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}}$$

και θέτοντας τις ίσες προκύπτει:

$$\frac{MU_a^{\ell}}{MU_a^{y}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{\ell}} = \frac{MU_b^{\ell}}{MU_b^{y}} \Rightarrow \boxed{MRS_a^{y,\ell} = MP_y^{\ell} = MRS_b^{y,\ell}}$$

Γενίκευση των κατά Pareto Συνθηκών Αριστοποίησης

Γενίκευση των κατά Pareto Συνθηκών Αριστοποίησης

- i, j παραγωγικοί συντελεστές
- z καταναλωτες
- k, m προϊόντα

Αριστοποίηση στην:	Συνθήκη:

Γενίκευση των κατά Pareto Συνθηκών Αριστοποίησης

- i, j παραγωγικοί συντελεστές
- z καταναλωτες
- k, m προϊόντα

Αριστοποίηση στην:	Συνθήκη:	
προσφορά εισροών	$MRS_1^{k,i} = \cdots = MRS_z^{k,i} = MP_k^i$	$\forall i, k$

Γενίκευση των κατά Pareto Συνθηκών Αριστοποίησης

- i, j παραγωγικοί συντελεστές
- z καταναλωτες
- k, m προϊόντα

Αριστοποίηση στην:	Συνθήκη:	
προσφορά εισροών	$MRS_1^{k,i} = \cdots = MRS_z^{k,i} = MP_k^i$	$\forall i, k$
κατανομή εισροών	$MRTS_1^{i,j} = MRTS_2^{i,j} = \cdots = MRTS_m^{i,j}$	$\forall i, j$

Γενίκευση των κατά Pareto Συνθηκών Αριστοποίησης

- i, j παραγωγικοί συντελεστές
- z καταναλωτες
- k, m προϊόντα

Αριστοποίηση στην:	Συνθήκη:	
προσφορά εισροών	$MRS_1^{k,i} = \cdots = MRS_z^{k,i} = MP_k^i$	$\forall i, k$
κατανομή εισροών	$MRTS_1^{i,j} = MRTS_2^{i,j} = \cdots = MRTS_m^{i,j}$	$\forall i, j$
παραγωγή αγαθών	$MRT^{k,m} = MC_k / MC_m$	$\forall k, m$

Γενίκευση των κατά Pareto Συνθηκών Αριστοποίησης

- i, j παραγωγικοί συντελεστές
- z καταναλωτες
- k, m προϊόντα

Αριστοποίηση στην:	Συνθήκη:	
προσφορά εισροών	$MRS_1^{k,i} = \cdots = MRS_z^{k,i} = MP_k^i$	$\forall i, k$
κατανομή εισροών	$MRTS_1^{i,j} = MRTS_2^{i,j} = \cdots = MRTS_m^{i,j}$	$\forall i, j$
παραγωγή αγαθών	$MRT^{k,m} = MC_k / MC_m$	$\forall k, m$
διανομή αγαθών	$MRS_1^{k,m} = MRS_2^{k,m} = \cdots = MRS_z^{k,m}$	$\forall k, m$

Γενίκευση των κατά Pareto Συνθηκών Αριστοποίησης

- i, j παραγωγικοί συντελεστές
- z καταναλωτες
- k, m προϊόντα

Αριστοποίηση στην:	Συνθήκη:	
προσφορά εισροών	$MRS_1^{k,i} = \cdots = MRS_z^{k,i} = MP_k^i$	$\forall i, k$
κατανομή εισροών	$MRTS_1^{i,j} = MRTS_2^{i,j} = \cdots = MRTS_m^{i,j}$	$\forall i, j$
παραγωγή αγαθών	$MRT^{k,m} = MC_k / MC_m$	$\forall k, m$
διανομή αγαθών	$MRS_1^{k,m} = MRS_2^{k,m} = \cdots = MRS_z^{k,m}$	$\forall k, m$
παραγωγή-διανομή αγαθών	$MRS_1^{k,m} = \cdots = MRS_z^{k,m} = MRT^{m,k}$	$\forall k, m$

Υποθέσεις του Υποδείγματος

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, (x και y)

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, (x και y)
- το x είναι εντάσεως εργασίας και το y εντάσεως κεφαλαίου

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, (x και y)
- το x είναι εντάσεως εργασίας και το y εντάσεως κεφαλαίου
- δύο καταναλωτές (A και B) με κανονικές προτιμήσεις

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, (x και y)
- το x είναι εντάσεως εργασίας και το y εντάσεως κεφαλαίου
- δύο καταναλωτές (A και B) με κανονικές προτιμήσεις
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)

Υποθέσεις του Υποδείγματος

- δύο αγαθά, (x και y)
- το x είναι εντάσεως εργασίας και το y εντάσεως κεφαλαίου
- δύο καταναλωτές (A και B) με κανονικές προτιμήσεις
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)
- ο A κατέχει μεγαλύτερη ποσότητα εργασίας ($\ell_a > \ell_b$)

Υποθέσεις του Υποδείγματος

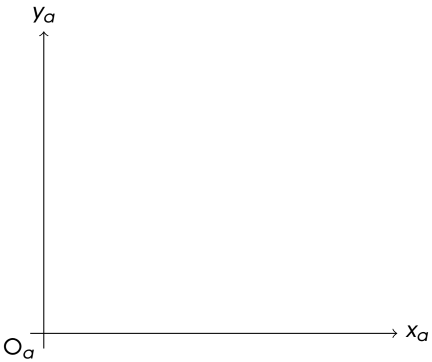
- δύο αγαθά, (x και y)
- το x είναι εντάσεως εργασίας και το y εντάσεως κεφαλαίου
- δύο καταναλωτές (A και B) με κανονικές προτιμήσεις
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)
- ο A κατέχει μεγαλύτερη ποσότητα εργασίας ($\ell_a > \ell_b$)
- ο B κατέχει μεγαλύτερη ποσότητα κεφαλαίου ($k_a < k_b$)

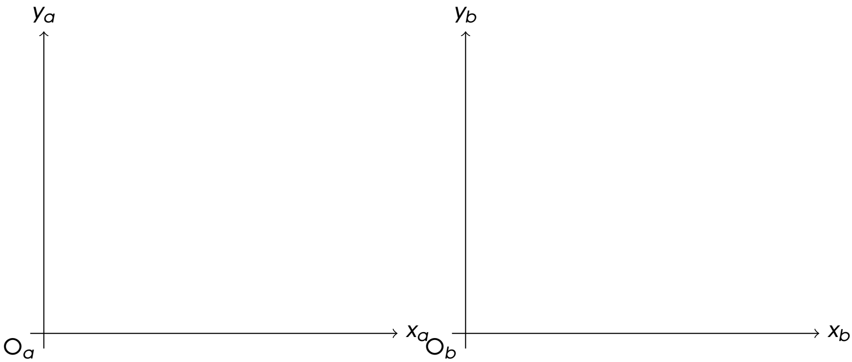
Υποθέσεις του Υποδείγματος

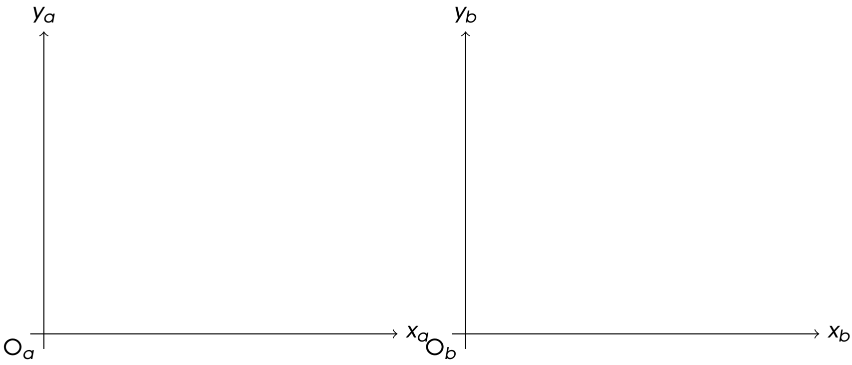
- δύο αγαθά, (x και y)
- το x είναι εντάσεως εργασίας και το y εντάσεως κεφαλαίου
- δύο καταναλωτές (A και B) με κανονικές προτιμήσεις
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)
- ο A κατέχει μεγαλύτερη ποσότητα εργασίας ($\ell_a > \ell_b$)
- ο B κατέχει μεγαλύτερη ποσότητα κεφαλαίου ($k_a < k_b$)
- οι οριακές χρησιμότητες και των δύο αγαθών και για τους δύο καταναλωτές είναι θετικές και φθίνουσες

Υποθέσεις του Υποδείγματος

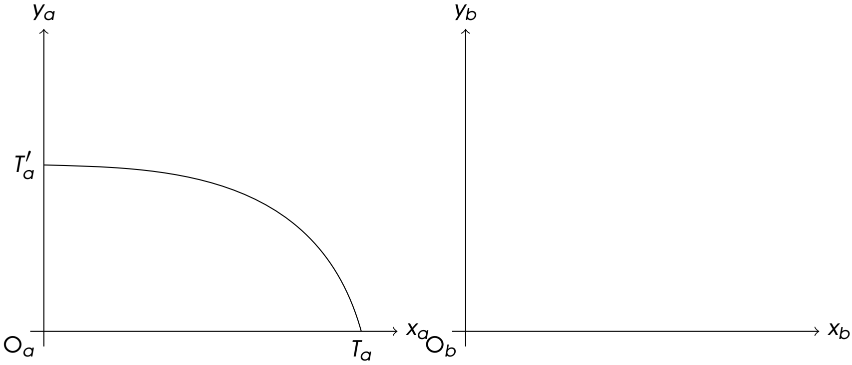
- δύο αγαθά, (x και y)
- το x είναι εντάσεως εργασίας και το y εντάσεως κεφαλαίου
- δύο καταναλωτές (A και B) με κανονικές προτιμήσεις
- δύο παραγωγικοί συντελεστές, κεφάλαιο (k) και εργασία (ℓ)
- ο A κατέχει μεγαλύτερη ποσότητα εργασίας ($\ell_a > \ell_b$)
- ο B κατέχει μεγαλύτερη ποσότητα κεφαλαίου ($k_a < k_b$)
- οι οριακές χρησιμότητες και των δύο αγαθών και για τους δύο καταναλωτές είναι θετικές και φθίνουσες
- τα οριακά προϊόντα των εισροών στην παραγωγή και των δύο αγαθών είναι θετικά και φθίνοντα


y_a
x_a
O_a

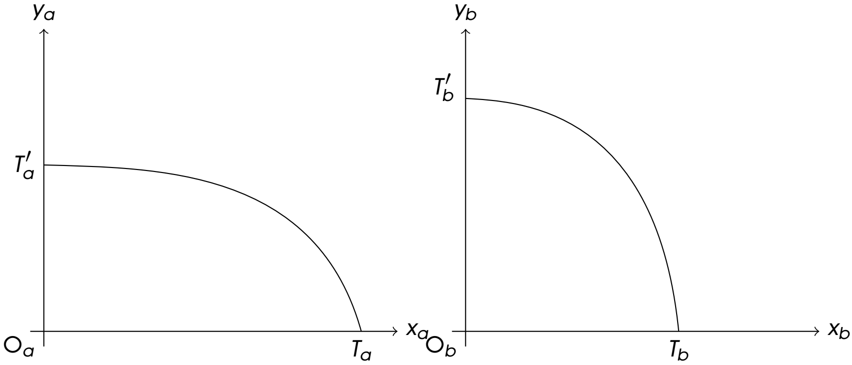

y_a
y_b
x_a
O_a
O_b
x_b



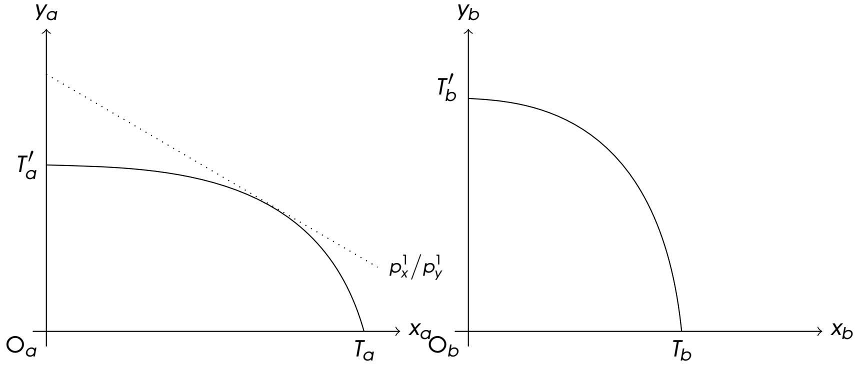
$\ell_a > \ell_b$ $\quad \frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y} \quad$ $k_a < k_b$



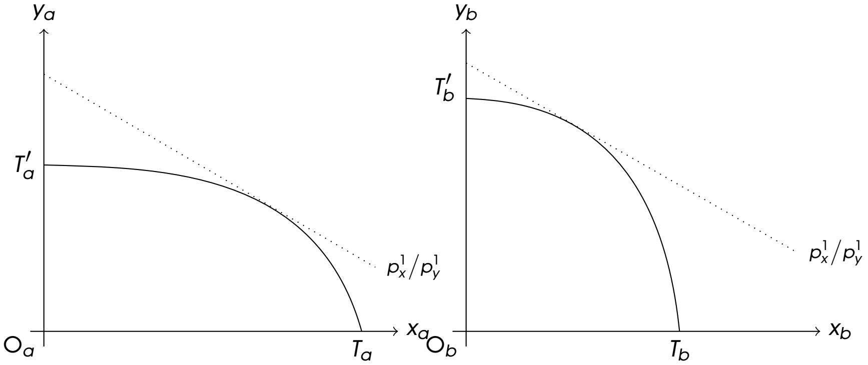
$\ell_a > \ell_b$ $\frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y}$ $k_a < k_b$



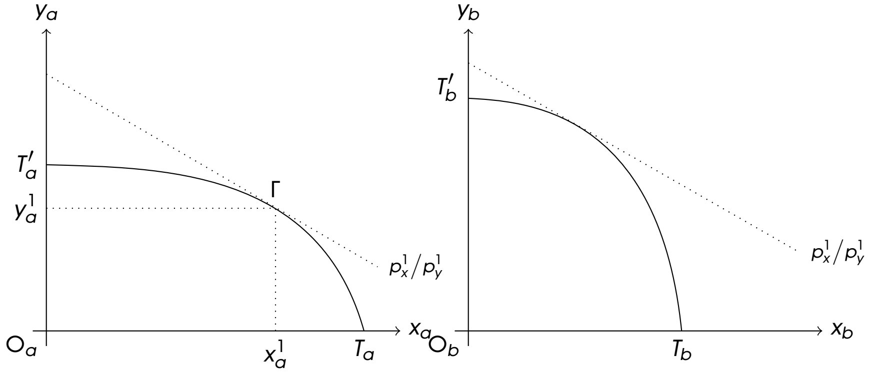
$\ell_a > \ell_b$ $\quad \frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y} \quad$ $k_a < k_b$



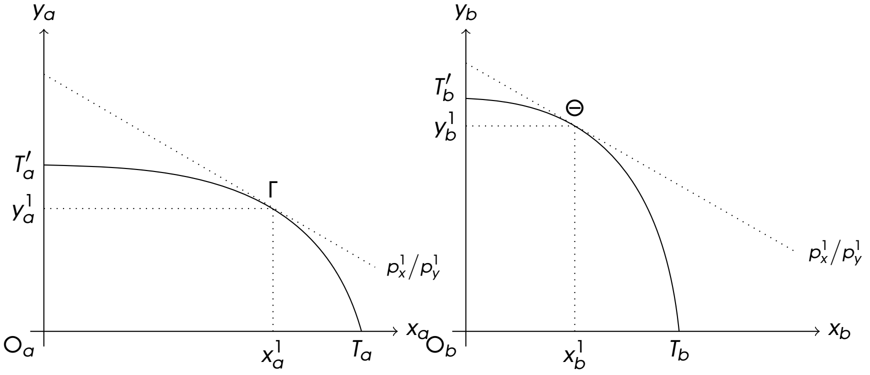
$\ell_a > \ell_b$ $\frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y}$ $k_a < k_b$



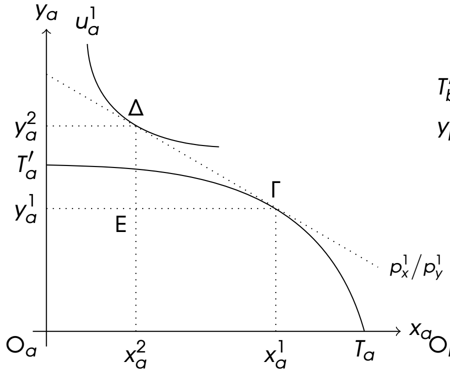
$\ell_a > \ell_b$ $\quad \frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y} \quad$ $k_a < k_b$

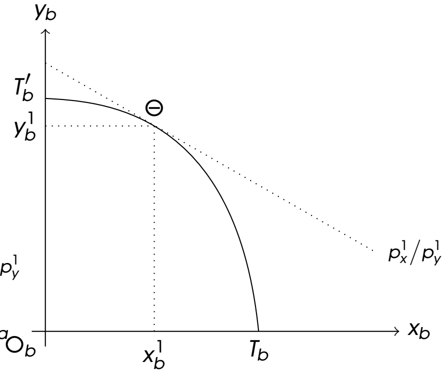


$\ell_a > \ell_b$ $\quad \frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y} \quad$ $k_a < k_b$

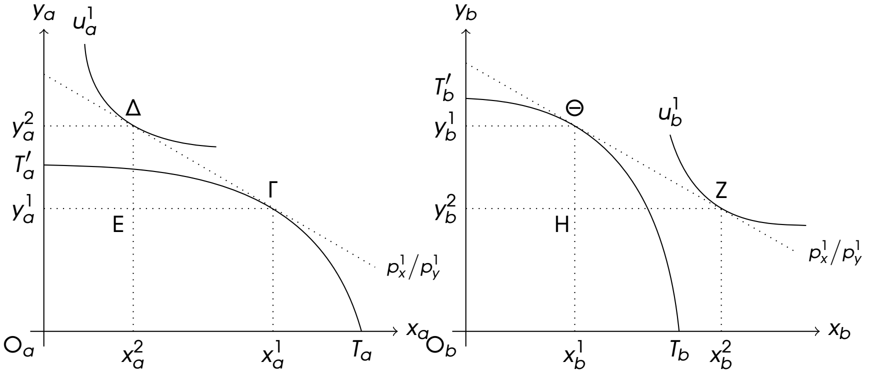


$\ell_a > \ell_b$ $\frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y}$ $k_a < k_b$

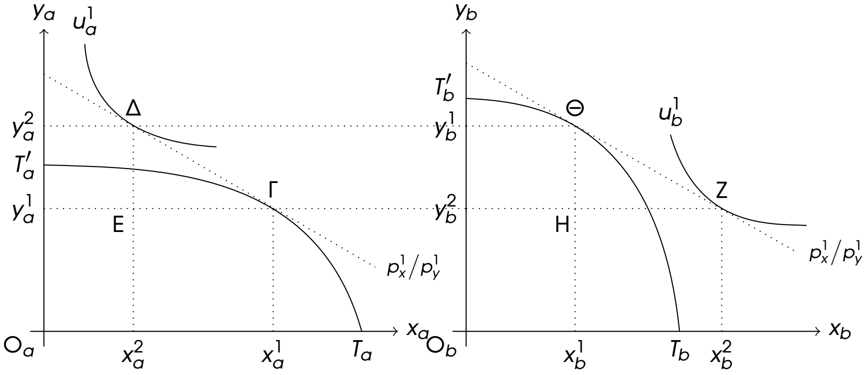




$\ell_a > \ell_b$ $\quad$ $\frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y}$ $\quad$ $k_a < k_b$



$\ell_a > \ell_b$ $\quad \frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y} \quad$ $k_a < k_b$



$\ell_a > \ell_b$ $\qquad \frac{k_x}{\ell_x} < \frac{k_y}{\ell_y} \qquad$ $k_a < k_b$

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Οι αθροιστικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης των n αγαθών είναι:

$$\begin{aligned} S_i\left(P\right) &= S_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) \\ D_i\left(P\right) &= D_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) \end{aligned}$$

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Οι αθροιστικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης των n αγαθών είναι:

$$\begin{aligned} S_i(P) &= S_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ D_i(P) &= D_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned}$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ομογενείς μηδενικού βαθμού.

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Οι αθροιστικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης των n αγαθών είναι:

$$\begin{aligned} S_i(P) &= S_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ D_i(P) &= D_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned}$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ομογενείς μηδενικού βαθμού.
Σύμφωνα με τον Walras υπάρχει ένα σύνολο τιμών για το οποίο θα ισχύει:

$$D_i(P) = S_i(P)$$

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Οι αθροιστικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης των n αγαθών είναι:

$$\begin{aligned} S_i(P) &= S_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ D_i(P) &= D_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned}$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ομογενείς μηδενικού βαθμού.
Σύμφωνα με τον Walras υπάρχει ένα σύνολο τιμών για το οποίο θα ισχύει:

$$D_i(P) = S_i(P) \text{ ή } Z_i(P) = D_i(P) - S_i(P) = 0 \quad \forall i$$

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Οι αθροιστικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης των n αγαθών είναι:

$$\begin{aligned} S_i(P) &= S_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ D_i(P) &= D_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned}$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ομογενείς μηδενικού βαθμού.
Σύμφωνα με τον Walras υπάρχει ένα σύνολο τιμών για το οποίο θα ισχύει:

$$D_i(P) = S_i(P) \text{ ή } Z_i(P) = D_i(P) - S_i(P) = 0 \quad \forall i$$

όπου $Z_i(P)$ είναι η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης για το αγαθό i η οποία επίσης είναι συνεχής και ομογενής μηδενικού βαθμού.

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Οι αθροιστικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης των n αγαθών είναι:

$$\begin{aligned} S_i(P) &= S_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ D_i(P) &= D_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned}$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ομογενείς μηδενικού βαθμού.
Σύμφωνα με τον Walras υπάρχει ένα σύνολο τιμών για το οποίο θα ισχύει:

$$D_i(P) = S_i(P) \text{ ή } Z_i(P) = D_i(P) - S_i(P) = 0 \quad \forall i$$

όπου $Z_i(P)$ είναι η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης για το αγαθό i η οποία επίσης είναι συνεχής και ομογενής μηδενικού βαθμού.
Εάν για κάποιο απο τα αγαθά ισχύει $p_i = 0$ (ελεύθερο αγαθό), τότε:

$$D_i(P) \leq S_i(P)$$

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Οι αθροιστικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης των n αγαθών είναι:

$$\begin{aligned} S_i\left(P\right) &= S_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) \\ D_i\left(P\right) &= D_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) \end{aligned}$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ομογενείς μηδενικού βαθμού.
Σύμφωνα με τον Walras υπάρχει ένα σύνολο τιμών για το οποίο θα ισχύει:

$$D_i\left(P\right) = S_i\left(P\right) \text{ ή } Z_i\left(P\right) = D_i\left(P\right) - S_i\left(P\right) = 0 \quad \forall i$$

όπου $Z_i\left(P\right)$ είναι η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης για το αγαθό i η οποία επίσης είναι συνεχής και ομογενής μηδενικού βαθμού.
Εάν για κάποιο απο τα αγαθά ισχύει $p_i = 0$ (ελεύθερο αγαθό), τότε:

$$D_i\left(P\right) \leq S_i\left(P\right) \text{ ή } Z_i\left(P\right) = D_i\left(P\right) - S_i\left(P\right) \leq 0 \ \forall i$$

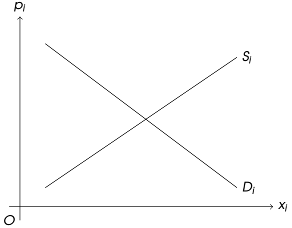
Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Κανονικό Αγαθό

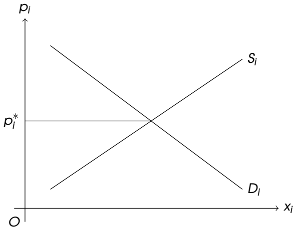
Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Κανονικό Αγαθό



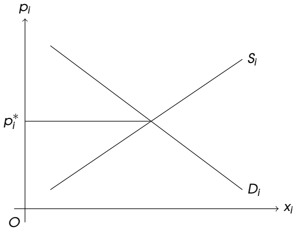
Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

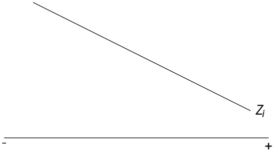
Κανονικό Αγαθό



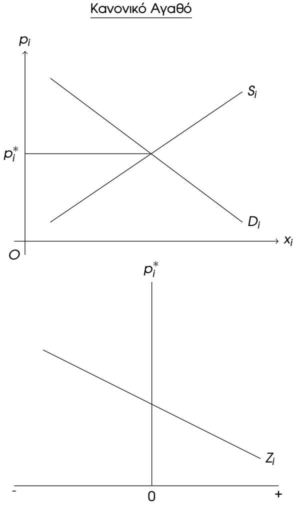
Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Κανονικό Αγαθό



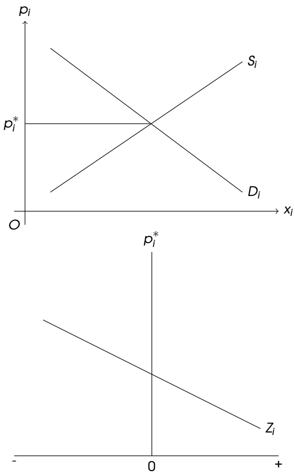


Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης



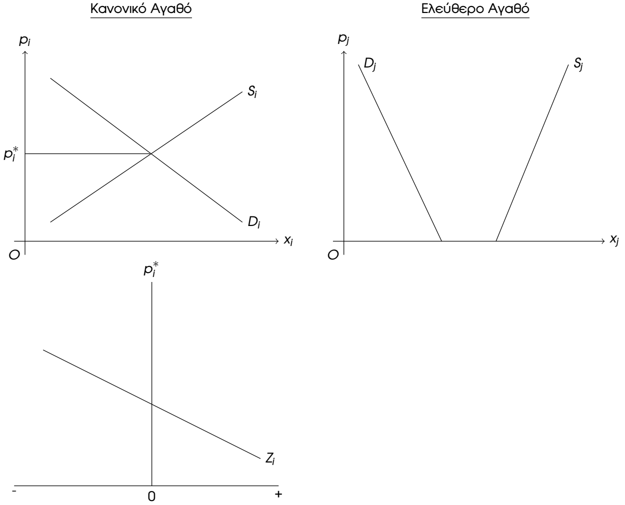
Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης

Κανονικό Αγαθό

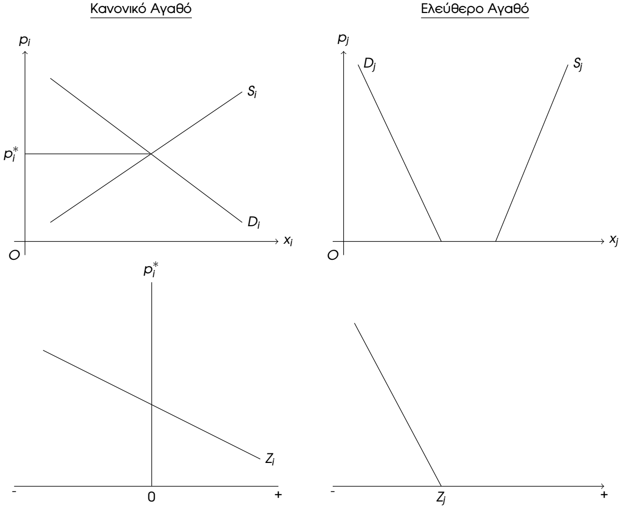


Ελεύθερο Αγαθό

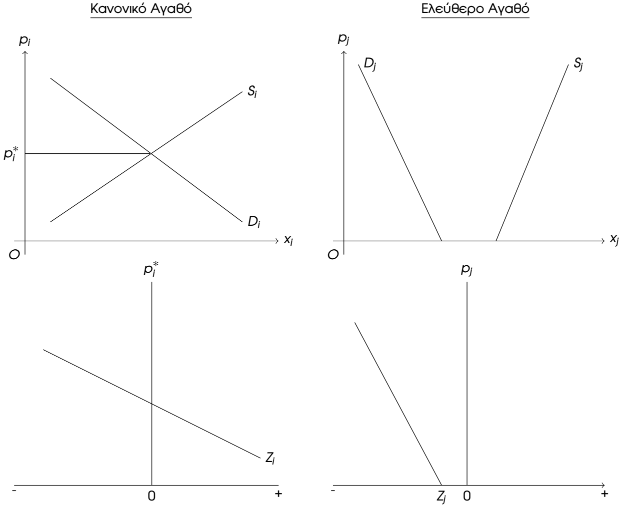
Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης



Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης



Συναρτήσεις Υπερβάλλουσας Ζήτησης



Ο Νόμος του Walras

Ο εισοδηματικός περιορισμός του A δίνεται από:

$$p_x D_x^a + p_y D_y^a = p_x S_x^a + p_y S_y^a$$

Ο Νόμος του Walras

Ο εισοδηματικός περιορισμός του A δίνεται από:

$$p_x D_x^a + p_y D_y^a = p_x S_x^a + p_y S_y^a$$

Στην ισορροπία θα ισχύει:

$$p_x \left(D_x^a - S_x^a\right) + p_y \left(D_y^a - S_y^a\right) = 0 \Rightarrow p_x Z_x^a + p_y Z_y^a = 0 \tag{18}$$

Ο Νόμος του Walras

Ο εισοδηματικός περιορισμός του A δίνεται από:

$$p_x D_x^a + p_y D_y^a = p_x S_x^a + p_y S_y^a$$

Στην ισορροπία θα ισχύει:

$$p_x \left(D_x^a - S_x^a\right) + p_y \left(D_y^a - S_y^a\right) = 0 \Rightarrow p_x Z_x^a + p_y Z_y^a = 0 \tag{18}$$

Αντίστοιχα η συνθήκη αγοραίας ισορροπίας για τον B:

$$p_x Z_x^b + p_y Z_y^b = 0 \tag{19}$$

Ο Νόμος του Walras

Ο εισοδηματικός περιορισμός του A δίνεται από:

$$p_x D_x^a + p_y D_y^a = p_x S_x^a + p_y S_y^a$$

Στην ισορροπία θα ισχύει:

$$p_x \left(D_x^a - S_x^a\right) + p_y \left(D_y^a - S_y^a\right) = 0 \Rightarrow p_x Z_x^a + p_y Z_y^a = 0 \tag{18}$$

Αντίστοιχα η συνθήκη αγοραίας ισορροπίας για τον B:

$$p_x Z_x^b + p_y Z_y^b = 0 \tag{19}$$

Από τις σχέσεις (18) και (19) προκύπτει:

$$p_x \left(Z_x^a + Z_x^b\right) + p_y \left(Z_y^a + Z_y^b\right) = 0 \Rightarrow p_x Z_x + p_y Z_y = 0$$

Ο Νόμος του Walras

Ο εισοδηματικός περιορισμός του A δίνεται από:

$$p_x D_x^a + p_y D_y^a = p_x S_x^a + p_y S_y^a$$

Στην ισορροπία θα ισχύει:

$$p_x \left(D_x^a - S_x^a\right) + p_y \left(D_y^a - S_y^a\right) = 0 \Rightarrow p_x Z_x^a + p_y Z_y^a = 0 \quad (18)$$

Αντίστοιχα η συνθήκη αγοραίας ισορροπίας για τον B:

$$p_x Z_x^b + p_y Z_y^b = 0 \quad (19)$$

Από τις σχέσεις (18) και (19) προκύπτει:

$$p_x \left(Z_x^a + Z_x^b\right) + p_y \left(Z_y^a + Z_y^b\right) = 0 \Rightarrow p_x Z_x + p_y Z_y = 0$$

Γενικεύοντας για n αγαθά, η παραπάνω σχέση διατυπώνεται:

$$\sum_i p_i Z_i \left(P\right) = 0 \quad \text{(Walras Law)}$$

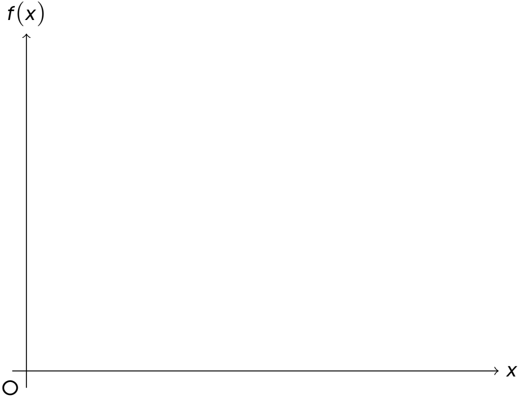
Το Θεώρημα του Brower

Το Θεώρημα του Brower

Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ενός κλειστού, περιορισμένου και κυρτού συνόλου μέσα στον ίδιο τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα ορισμένο σημείο x^* τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x^*) = x^*$

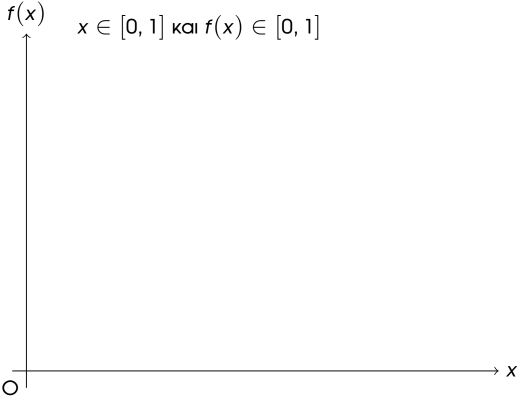
Το Θεώρημα του Brower

Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ενός κλειστού, περιορισμένου και κυρτού συνόλου μέσα στον ίδιο τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα ορισμένο σημείο x^* τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x^*) = x^*$



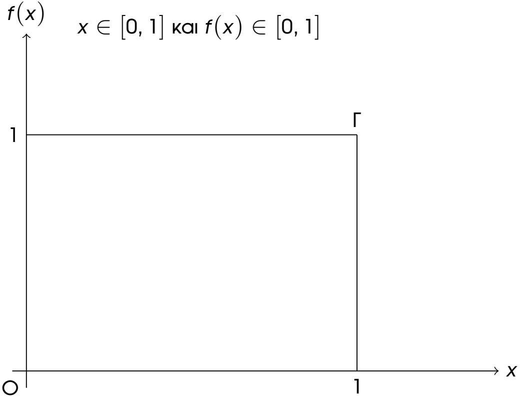
Το Θεώρημα του Brower

Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ενός κλειστού, περιορισμένου και κυρτού συνόλου μέσα στον ίδιο τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα ορισμένο σημείο x^* τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x^*) = x^*$



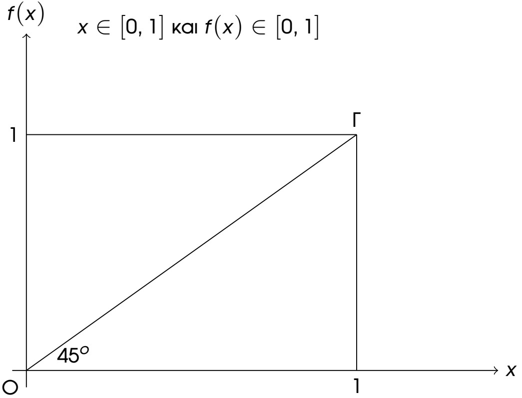
Το Θεώρημα του Brower

Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ενός κλειστού, περιορισμένου και κυρτού συνόλου μέσα στον ίδιο τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα ορισμένο σημείο x^* τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x^*) = x^*$



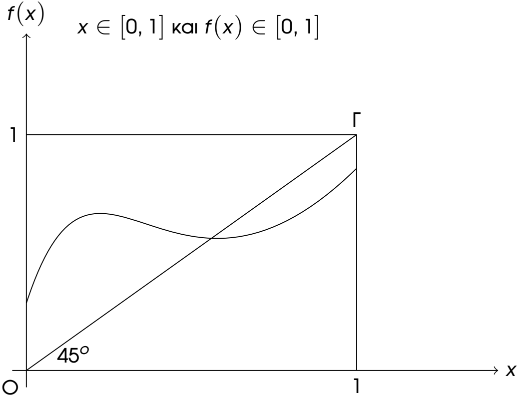
Το Θεώρημα του Brower

Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ενός κλειστού, περιορισμένου και κυρτού συνόλου μέσα στον ίδιο τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα ορισμένο σημείο x^* τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x^*) = x^*$



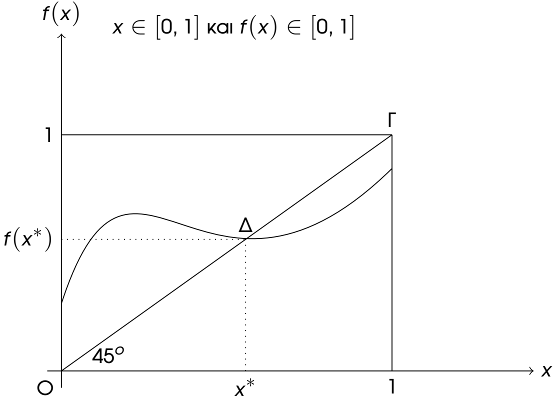
Το Θεώρημα του Brower

Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ενός κλειστού, περιορισμένου και κυρτού συνόλου μέσα στον ίδιο τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα ορισμένο σημείο x^* τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x^*) = x^*$



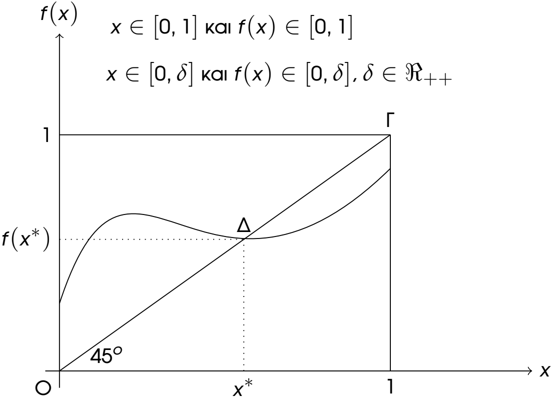
Το Θεώρημα του Brower

Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ενός κλειστού, περιορισμένου και κυρτού συνόλου μέσα στον ίδιο τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα ορισμένο σημείο x^* τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x^*) = x^*$



Το Θεώρημα του Brower

Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ενός κλειστού, περιορισμένου και κυρτού συνόλου μέσα στον ίδιο τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα ορισμένο σημείο x^* τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x^*) = x^*$



Απόδειξη του Νόμου του Walras

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Αρχικά μπορούμε να ομαλοποιήσουμε τις τιμές των αγαθών ως εξής:

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i}{\sum_i p_i}$$

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Αρχικά μπορούμε να ομαλοποιήσουμε τις τιμές των αγαθών ως εξής:

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i}{\sum_i p_i}$$

Δεδομένης της ομογένειας μηδενικού βαθμού των $Z_i(P)$, θα ισχύει:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_j}$$

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Αρχικά μπορούμε να ομαλοποιήσουμε τις τιμές των αγαθών ως εξής:

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i}{\sum_i p_i}$$

Δεδομένης της ομογένειας μηδενικού βαθμού των $Z_i(P)$, θα ισχύει:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_j}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τη μαθηματική απεικόνιση R_i που προσαρμόζει τις τιμές των αγαθών σύμφωνα με τον νόμο της ζήτησης, ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right) \quad \forall i \tag{20}$$

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Αρχικά μπορούμε να ομαλοποιήσουμε τις τιμές των αγαθών ως εξής:

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i}{\sum_i p_i}$$

Δεδομένης της ομογένειας μηδενικού βαθμού των $Z_i(P)$, θα ισχύει:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_j}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τη μαθηματική απεικόνιση R_i που προσαρμόζει τις τιμές των αγαθών σύμφωνα με τον νόμο της ζήτησης, ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right) \quad \forall i \tag{20}$$

εάν $Z_i\left(\tilde{P}\right) > 0 \Rightarrow \Delta p_i > 0$,

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Αρχικά μπορούμε να ομαλοποιήσουμε τις τιμές των αγαθών ως εξής:

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i}{\sum_i p_i}$$

Δεδομένης της ομογένειας μηδενικού βαθμού των $Z_i(P)$, θα ισχύει:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_j}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τη μαθηματική απεικόνιση R_i που προσαρμόζει τις τιμές των αγαθών σύμφωνα με τον νόμο της ζήτησης, ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right) \quad \forall i \tag{20}$$

εάν $Z_i\left(\tilde{P}\right) > 0 \Rightarrow \Delta p_i > 0$, ενώ εάν $Z_i\left(\tilde{P}\right) < 0 \Rightarrow \Delta p_i < 0$.

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Οι νέες τιμές όμως μπορεί να είναι αρνητικές.

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Οι νέες τιμές όμως μπορεί να είναι αρνητικές. Ορίζουμε λοιπόν την (20) ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \max\left\{\tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right), 0\right\} \quad \forall i$$

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Οι νέες τιμές όμως μπορεί να είναι αρνητικές. Ορίζουμε λοιπόν την (20) ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \max\left\{\tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και ομαλοποιώντας τις νέες τιμές $\sum_i^n R_i\left(\tilde{P}\right) = 1$,

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Οι νέες τιμές όμως μπορεί να είναι αρνητικές. Ορίζουμε λοιπόν την (20) ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \max\left\{\tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και ομαλοποιώντας τις νέες τιμές $\sum_i^n R_i\left(\tilde{P}\right) = 1$, η απεικόνιση R_i ικανοποιεί το θεώρημα του Brouwer:

$$\tilde{p}_i^* = \max\left\{\tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right), 0\right\} \quad \forall i$$

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Οι νέες τιμές όμως μπορεί να είναι αρνητικές. Ορίζουμε λοιπόν την (20) ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \max\left\{\tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και ομαλοποιώντας τις νέες τιμές $\sum_i^n R_i\left(\tilde{P}\right) = 1$, η απεικόνιση R_i ικανοποιεί το θεώρημα του Brouwer:

$$\tilde{p}_i^* = \max\left\{\tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και επομένως οι τιμές $\tilde{p}_i^*$ είναι οι τιμές ισορροπίας:

$$\tilde{p}_i^* = \tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right)$$

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Οι νέες τιμές όμως μπορεί να είναι αρνητικές. Ορίζουμε λοιπόν την (20) ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \max\left\{\tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και ομαλοποιώντας τις νέες τιμές $\sum_i^n R_i\left(\tilde{P}\right) = 1$, η απεικόνιση R_i ικανοποιεί το θεώρημα του Brouwer:

$$\tilde{p}_i^* = \max\left\{\tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και επομένως οι τιμές $\tilde{p}_i^*$ είναι οι τιμές ισορροπίας:

$$\tilde{p}_i^* = \tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right) \Rightarrow Z_i\left(\tilde{P}^*\right) = 0 \ \forall \tilde{p}_i^* > 0 \text{ κανονικό αγαθό}$$

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Οι νέες τιμές όμως μπορεί να είναι αρνητικές. Ορίζουμε λοιπόν την (20) ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \max\left\{\tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και ομαλοποιώντας τις νέες τιμές $\sum_i^n R_i\left(\tilde{P}\right) = 1$, η απεικόνιση R_i ικανοποιεί το θεώρημα του Brouwer:

$$\tilde{p}_i^* = \max\left\{\tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και επομένως οι τιμές $\tilde{p}_i^*$ είναι οι τιμές ισορροπίας:

$$\tilde{p}_i^* = \tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right) \Rightarrow Z_i\left(\tilde{P}^*\right) = 0 \ \forall \tilde{p}_i^* > 0 \ \text{κανονικό αγαθό}$$

$$\tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right) \leq 0$$

Απόδειξη του Νόμου του Walras

Οι νέες τιμές όμως μπορεί να είναι αρνητικές. Ορίζουμε λοιπόν την (20) ως εξής:

$$R_i\left(\tilde{P}\right) = \max\left\{\tilde{p}_i + Z_i\left(\tilde{P}\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και ομαλοποιώντας τις νέες τιμές $\sum_i^n R_i\left(\tilde{P}\right) = 1$, η απεικόνιση R_i ικανοποιεί το θεώρημα του Brouwer:

$$\tilde{p}_i^* = \max\left\{\tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right), 0\right\} \quad \forall i$$

και επομένως οι τιμές $\tilde{p}_i^*$ είναι οι τιμές ισορροπίας:

$$\tilde{p}_i^* = \tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right) \Rightarrow Z_i\left(\tilde{P}^*\right) = 0 \;\; \forall \tilde{p}_i^* > 0 \;\; \text{κανονικό αγαθό}$$

$$\tilde{p}_i^* + Z_i\left(\tilde{P}^*\right) \leq 0 \Rightarrow Z_i\left(\tilde{P}^*\right) \leq 0 \;\; \forall \tilde{p}_i^* = 0 \;\; \text{ελεύθερο αγαθό}$$

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.
Επομένως εάν οι παραγωγοί του y υποκαταστήσουν το κεφάλαιο με εργασία θα απελευθερωθούν 5 μονάδες εργασίας

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.
Επομένως εάν οι παραγωγοί του y υποκαταστήσουν το κεφάλαιο με εργασία θα απελευθερωθούν 5 μονάδες εργασίας
Αυτές οι 5 μονάδες εργασίας είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα κεφαλαίου στην παραγωγή του x.

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.
Επομένως εάν οι παραγωγοί του y υποκαταστήσουν το κεφάλαιο με εργασία θα απελευθερωθούν 5 μονάδες εργασίας
Αυτές οι 5 μονάδες εργασίας είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα κεφαλαίου στην παραγωγή του x.

$\Delta\ell_x > 0$, $\Delta k_x < 0$

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.
Επομένως εάν οι παραγωγοί του y υποκαταστήσουν το κεφάλαιο με εργασία θα απελευθερωθούν 5 μονάδες εργασίας
Αυτές οι 5 μονάδες εργασίας είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα κεφαλαίου στην παραγωγή του x.

$$\Delta\ell_x > 0, \Delta k_x < 0 \Rightarrow \Delta MP_x^{\ell} < 0, \Delta MP_x^{k} > 0$$

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

· Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.
Επομένως εάν οι παραγωγοί του y υποκαταστήσουν το κεφάλαιο με εργασία θα απελευθερωθούν 5 μονάδες εργασίας
Αυτές οι 5 μονάδες εργασίας είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα κεφαλαίου στην παραγωγή του x.

$$\Delta\ell_x > 0, \Delta k_x < 0 \Rightarrow \Delta MP_x^{\ell} < 0, \Delta MP_x^{k} > 0 \Rightarrow \Delta\left(\frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}}\right) < 0$$

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.
Επομένως εάν οι παραγωγοί του y υποκαταστήσουν το κεφάλαιο με εργασία θα απελευθερωθούν 5 μονάδες εργασίας
Αυτές οι 5 μονάδες εργασίας είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα κεφαλαίου στην παραγωγή του x.

$$\Delta\ell_x > 0, \Delta k_x < 0 \Rightarrow \Delta MP_x^{\ell} < 0, \Delta MP_x^{k} > 0 \Rightarrow \Delta\left(\frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}}\right) < 0$$

$$\Delta\ell_y < 0, \Delta k_y > 0$$

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.
Επομένως εάν οι παραγωγοί του y υποκαταστήσουν το κεφάλαιο με εργασία θα απελευθερωθούν 5 μονάδες εργασίας
Αυτές οι 5 μονάδες εργασίας είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα κεφαλαίου στην παραγωγή του x.

$$\Delta\ell_x > 0, \Delta k_x < 0 \Rightarrow \Delta MP_x^{\ell} < 0, \Delta MP_x^{k} > 0 \Rightarrow \Delta\left(\frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}}\right) < 0$$

$$\Delta\ell_y < 0, \Delta k_y > 0 \Rightarrow \Delta MP_y^{\ell} > 0, \Delta MP_y^{k} < 0$$

Ανακατανομή των Παραγωγικών Συντελεστών

- Έστω ότι ισχύει:

$$MRTS_x^{k,\ell} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRTS_y^{k,\ell} = \frac{1}{5}$$

Στο x: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 3 μονάδες εργασίας.
Στο y: κάθε μονάδα κεφαλαίου απαιτεί 5 μονάδες εργασίας.
Επομένως εάν οι παραγωγοί του y υποκαταστήσουν το κεφάλαιο με εργασία θα απελευθερωθούν 5 μονάδες εργασίας
Αυτές οι 5 μονάδες εργασίας είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα κεφαλαίου στην παραγωγή του x.

$$\Delta\ell_x > 0, \Delta k_x < 0 \Rightarrow \Delta MP_x^{\ell} < 0, \Delta MP_x^{k} > 0 \Rightarrow \Delta\left(\frac{MP_x^{\ell}}{MP_x^{k}}\right) < 0$$

$$\Delta\ell_y < 0, \Delta k_y > 0 \Rightarrow \Delta MP_y^{\ell} > 0, \Delta MP_y^{k} < 0 \Rightarrow \Delta\left(\frac{MP_y^{\ell}}{MP_y^{k}}\right) > 0$$

back

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.
Επομένως εάν ο B υποκαταστήσει το αγαθό y με το x θα απελευθερώσει 5 μονάδες από το x.

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.
Επομένως εάν ο B υποκαταστήσει το αγαθό y με το x θα απελευθερώσει 5 μονάδες από το x.
Αυτές οι 5 μονάδες του x είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα y για τον A.

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.
Επομένως εάν ο B υποκαταστήσει το αγαθό y με το x θα απελευθερώσει 5 μονάδες από το x.
Αυτές οι 5 μονάδες του x είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα y για τον A.

$\Delta x_a > 0, \Delta y_a < 0$

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.
Επομένως εάν ο B υποκαταστήσει το αγαθό y με το x θα απελευθερώσει 5 μονάδες από το x.
Αυτές οι 5 μονάδες του x είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα y για τον A.

$$\Delta x_a > 0, \Delta y_a < 0 \Rightarrow \Delta MU_a^x < 0, \Delta MU_a^y > 0$$

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.
Επομένως εάν ο B υποκαταστήσει το αγαθό y με το x θα απελευθερώσει 5 μονάδες από το x.
Αυτές οι 5 μονάδες του x είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα y για τον A.

$$\Delta x_a > 0, \Delta y_a < 0 \Rightarrow \Delta MU_a^x < 0, \Delta MU_a^y > 0 \Rightarrow \Delta \left(\frac{MU_a^x}{MU_a^y} \right) < 0$$

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.
Επομένως εάν ο B υποκαταστήσει το αγαθό y με το x θα απελευθερώσει 5 μονάδες από το x.
Αυτές οι 5 μονάδες του x είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα y για τον A.

$$\Delta x_a > 0, \Delta y_a < 0 \Rightarrow \Delta MU_a^x < 0, \Delta MU_a^y > 0 \Rightarrow \Delta\left(\frac{MU_a^x}{MU_a^y}\right) < 0$$

$$\Delta x_b < 0, \Delta y_b > 0$$

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.
Επομένως εάν ο B υποκαταστήσει το αγαθό y με το x θα απελευθερώσει 5 μονάδες από το x.
Αυτές οι 5 μονάδες του x είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα y για τον A.

$$\Delta x_a > 0, \Delta y_a < 0 \Rightarrow \Delta MU_a^x < 0, \Delta MU_a^y > 0 \Rightarrow \Delta \left(\frac{MU_a^x}{MU_a^y} \right) < 0$$

$$\Delta x_b < 0, \Delta y_b > 0 \Rightarrow \Delta MU_b^x > 0, \Delta MU_b^y < 0$$

Αναδιανομή των Αγαθών

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_a^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRS_b^{y,x} = \frac{1}{5}$$

Για τον A: μια μονάδα y αξίζει 3 μονάδες x.
Για τον B: μια μονάδα y αξίζει 5 μονάδες x.
Επομένως εάν ο B υποκαταστήσει το αγαθό y με το x θα απελευθερώσει 5 μονάδες από το x.
Αυτές οι 5 μονάδες του x είναι παραπάνω από αρκετές για να υποκαταστήσουν μία μονάδα y για τον A.

$$\Delta x_a > 0, \Delta y_a < 0 \Rightarrow \Delta MU_a^x < 0, \Delta MU_a^y > 0 \Rightarrow \Delta \left(\frac{MU_a^x}{MU_a^y} \right) < 0$$

$$\Delta x_b < 0, \Delta y_b > 0 \Rightarrow \Delta MU_b^x > 0, \Delta MU_b^y < 0 \Rightarrow \Delta \left(\frac{MU_b^x}{MU_b^y} \right) > 0$$

Αναδιανομή Παραγωγής και Κατανάλωσης

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_0^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRT_b^{x,y} = \frac{1}{5}$$

Αναδιανομή Παραγωγής και Κατανάλωσης

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_0^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRT_b^{x,y} = \frac{1}{5}$$

Ο A και ο B είναι διατεθιμένοι να παραιτηθούν μιας μονάδας y εάν λάβουν 3 μονάδες x.

Αναδιανομή Παραγωγής και Κατανάλωσης

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_0^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRT_b^{x,y} = \frac{1}{5}$$

Ο A και ο B είναι διατεθιμένοι να παραιτηθούν μιας μονάδας y εάν λάβουν 3 μονάδες x.

Για κάθε μονάδα μείωσης του y μπορούν να παραχθούν 5 μονάδες x.

Αναδιανομή Παραγωγής και Κατανάλωσης

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_0^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRT_b^{x,y} = \frac{1}{5}$$

Ο A και ο B είναι διατεθιμένοι να παραιτηθούν μιας μονάδας y εάν λάβουν 3 μονάδες x.

Για κάθε μονάδα μείωσης του y μπορούν να παραχθούν 5 μονάδες x.

Επομένως, μπορεί να αλλάξει ο συνδυασμός παραγωγής αυξάνοντας την ευημερία των A και B.

Αναδιανομή Παραγωγής και Κατανάλωσης

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_0^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRT_b^{x,y} = \frac{1}{5}$$

Ο A και ο B είναι διατεθιμένοι να παραιτηθούν μιας μονάδας y εάν λάβουν 3 μονάδες x.
Για κάθε μονάδα μείωσης του y μπορούν να παραχθούν 5 μονάδες x.
Επομένως, μπορεί να αλλάξει ο συνδυασμός παραγωγής αυξάνοντας την ευημερία των A και B.

$\Delta x > 0, \Delta y < 0$

Αναδιανομή Παραγωγής και Κατανάλωσης

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_0^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRT_b^{x,y} = \frac{1}{5}$$

Ο A και ο B είναι διατεθιμένοι να παραιτηθούν μιας μονάδας y εάν λάβουν 3 μονάδες x.
Για κάθε μονάδα μείωσης του y μπορούν να παραχθούν 5 μονάδες x.
Επομένως, μπορεί να αλλάξει ο συνδυασμός παραγωγής αυξάνοντας την ευημερία των A και B.

$$\Delta x > 0, \Delta y < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta MU_0^x < 0 & \Delta MU_0^y > 0 \\ \Delta MC_x^0 > 0 & MC_y^0 < 0 \end{cases}$$

Αναδιανομή Παραγωγής και Κατανάλωσης

Έστω ότι ισχύει:

$$MRS_0^{y,x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad MRT_b^{x,y} = \frac{1}{5}$$

Ο A και ο B είναι διατεθιμένοι να παραιτηθούν μιας μονάδας y εάν λάβουν 3 μονάδες x.

Για κάθε μονάδα μείωσης του y μπορούν να παραχθούν 5 μονάδες x.

Επομένως, μπορεί να αλλάξει ο συνδυασμός παραγωγής αυξάνοντας την ευημερία των A και B.

$$\Delta x > 0, \Delta y < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta MU_0^x < 0 & \Delta MU_0^y > 0 \\ \Delta MC_x^0 > 0 & MC_y^0 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \left(\dfrac{MU_0^x}{MU_0^y} \right) & < 0 \\ \Delta \left(\dfrac{MC_x^0}{MC_y^0} \right) & > 0 \end{cases}$$

back

Τέλος 1ης Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης