ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Στατιστική ΙΙ

Ενότητα 3: Εκτιμητική (Σημειακή Εκτίμηση)

Γεώργιος Κ. Τσιώτας
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Περιεχόμενα

Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Μ.Μ.Π.)

Μέθοδος των Ροπών

Τί είναι η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.);

Έστω για τ.μς $X_1, \ldots, X_n$ για τις οποίες θέλουμε να προσδιορίσουμε μια αντιπροσωπευτική τιμή θ. Αυτή, συμφωνα με τη Μ.Ε.Τ., μπορεί να εκφράζει μια τιμή $\hat{\theta}$ για την οποία ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των X_i από την αντιπροσωπευτική τιμή. Έτσι,

$$\min_{\theta} S \equiv \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2,$$

Τί είναι η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων (M.E.T.); (συν.)

Μέσω συνθήκης πρώτης τάξης,

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \ldots \quad \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

ορίζουμε την $\hat{\theta}$ ως εκτιμήτρια συνάρτηση του μέσου της X μέσω της M.E.T.. Συμπληρωματικά θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0.$$

Τί είναι η Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Μ.Μ.Π.);

Έστω για τ.μς $X_1, \ldots, X_n$ για τις οποίες γνωρίζουμε ή υποθέτουμε ότι κατανέμονται σύμφωνα με μια $P(\cdot, \theta)$ θεωρητική κατανομή με παραμετρο προς εκτίμηση την θ. Τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ η οποία επιτυγχάνει να μεγιστοποιήσει την από κοινου πιθανότητα των $X_1, \ldots, X_n$. Έτσι, ορίζουμε την απο κοινού πιθανότητα (ή πιθανοφάνεια) ως:

$$L(X_1, \ldots, X_n, \theta) \equiv P(X_1 \cap \ldots \cap X_n, \theta) \equiv L(\cdot, \theta).$$

Τί είναι η Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Μ.Μ.Π.); (συν.)

Μέσω συνθήκης πρώτης τάξης,

$$\frac{\partial L(\cdot,\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \ldots \ \hat{\theta} = \cdots ,$$

ορίζουμε την εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ βάση του κριτηρίου της Μ.Π..
Συμπληρωματικά θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{\partial^2 L(\cdot,\theta)}{\partial\theta^2} < 0.$$

Τί είναι η Μέθοδος των Ροπών;

Έστω για τ.μς $X_1, \ldots, X_n$ γνωρίζουμε ή υποθέτουμε ότι κατανέμονται σύμφωνα με μια $P(\cdot, \theta)$ θεωρητική κατανομή με παραμετρο την θ. Τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ χρησιμοποιώντας τα εμπειρικά μέτρα των ροπών του δείγματος $X_1, \ldots, X_n$.

Παράδειγμα της Μεθόδου των Ροπών

Έστω για τ.μ. X γνωρίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της

$$P(X,\theta) = (\theta+1)\cdot X^{\theta},\ 0 \leq X \leq 1$$

Επίσης, έστω δείγμα με τιμές:

$$\{0,2 \mid 0,4 \mid 0,5 \mid 0,7 \mid 0,8 \mid 0,8 \mid 0,9 \mid 0,9\}$$

Να προσδριορίσετε την $\hat{\theta}$ μέσω της μεθόδου των ροπών.

Παράδειγα της Μεθόδου των Ροπών-Λύση

Επειδή έχουμε μια άγνωστη παράμετρο, την θ, χρησιμοποιούμε μία ροπή. Έτσι,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 (\theta+1)\cdot X^{\theta}\cdot X\cdot dx \\
&= \int_0^1 (\theta+1)\cdot X^{\theta+1} dx \\
&= (\theta+1)[\frac{X^{\theta+2}}{\theta+2}]_0^1 = (\theta+1)[\frac{1}{\theta+2}-0] = \frac{\theta+1}{\theta+2}
\end{aligned}
$$

Παράδειγα της Μεθόδου των Ροπών-Λύση(συν.)

Επίσης, μέσω δείγματος έχουμε:

$$\frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{8} = \frac{5,2}{8},$$

Έτσι,

$$\frac{5,2}{8} = \frac{\theta+1}{\theta+2} \Rightarrow \hat{\theta} = 0,86.$$

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης