ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Στατιστική II

Ενότητα 4: Ιδιότητες και Κατανομές Εκτιμητριών Συναρτήσεων

Γεώργιος Κ. Τσιώτας
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Περιεχόμενα

Η ιδιότητα της Αμεροληψίας

Τι είναι η Αμεροληψία;

Έστω για τ.μς $X_1, \ldots, X_n$ για τις οποίες ορίζουμε παράμετρο θ (μπορεί να αντιπροσωπευει: μέση τιμή, διακύμανση, κ.ο.κ.) προς εκτίμηση. Έστω προσδιορίζουμε εκτιμήτρια συνάρτηση $\hat{\theta}$ μέσω κάποιας μεθόδου (Ροπών, Μ.Ε.Τ., Μ.Μ.Π.) τότε αυτή θεωρείται ως αμερόληπτη εκτιμήτρια συνάρτηση της θ, εαν ισχύει ότι:

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Παράδειγμα Αμεροληψίας

Εαν τ.μς $X_1, \ldots, X_n$ προέρχονται από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 τότε θα ισχύει

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(x_i)}{n} = \frac{\mu + \cdots + \mu}{n} = \mu,$$

άρα η εκτιμήτρια $\bar{X}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μ. Επίσης, η $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$, είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ^2 (γιατί $E(S^2) = \sigma^2$).

Η ιδιότητα της Συνέπειας

Τι είναι η Συνέπεια;

Έστω για τ.μς $X_1, \ldots, X_n$ για τις οποίες υπάρχει παράμετρος θ. Πολλές φορές μια εκτιμήτρια συνάρτηση είναι αμερόληπτη ασυμπτωτικά (για $n \to \infty$). Έτσι, η εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια συνάρτηση της θ, εαν ισχύει ότι:

$$P(\mid \hat{\theta} - \theta \mid < \epsilon) = 1,$$

όπου $P(\cdot)$ πιθανότητα και ισχύει για $n \to \infty$ και $\epsilon \to 0$.

Η ιδιότητα της Αποτελεσματικότητας

Τι είναι η Αποτελεσματικότητα;

Έστω για τ.μς $X_1, \ldots, X_n$ για τις οποίες υπάρχει εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια συνάρτηση της θ, τότε είναι πιο αποτελεσματική μιας άλλης αμερόληπτης $\tilde{\theta}$ εαν ισχύει: ότι,

$$V(\hat{\theta}) \equiv E(\hat{\theta} - \theta)^2 < E(\tilde{\theta} - \theta)^2 \equiv V(\tilde{\theta}),$$

όπου $V(\cdot)$ η διακύμανση.

Θεώρημα *Cramer — Rao*

Τι ισχύει σύμφωνα με τους *Cramer — Rao*;

Έστω για τ.μς $X_1, \dots, X_n$ για τις οποίες γνωρίζουμε ή υποθέτουμε ότι κατανέμονται σύμφωνα με μια $P(\cdot, \theta)$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε μια εκτιμήτρια συνάρτηση $\hat{\theta}$ μέσω της Μ.Μ.Π.. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των *Cramer — Rao* θα ισχύει:

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} \sim N(0, 1).$$

Τι ισχύει σύμφωνα με τους *Cramer − Rao*; (συν.)

Εδώ θα ισχύει ότι:

$$\sigma^2_{\hat{\theta}} = -\frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 \ell(\cdot,\theta)}{\partial\theta^2}\right)},$$

και $\ell(\cdot, \theta) = \log L(\cdot, \theta)$ ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Τέλος Ενότητας