ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Στατιστική ΙΙ

Ενότητα 5: Διαστήματα Εμπιστοσύνης Ι

Γεώργιος Κ. Τσιώτας
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013

Περιεχόμενα

Τί είναι τα Διαστήματα Εμπιστοσύνης;

Τα Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) εκφράζουν το διάστημα τιμών για ένα στατιστικό μέτρο ή μια παράμετρο ενός τυχαίου γεγονότος στον πληθυσμό με πιθανότητα $1 - \alpha$.

1. Στατιστικό μέτρο: παρ. μ (μέσος), σ^2 (διακύμανση), *p* (αναλογία).
2. Το Δ.Ε. ορίζεται με πιθανότητα $1 - \alpha$.
3. Το α εκφράζει το επίπεδο σημαντικότητας (ή το σφάλμα εκτίμησης).

Δ.Ε. μέσω παραδειγμάτων:

1. *Παράδειγμα Α*: Ένα χρεόγραφο έχει μια μέση απόδοση για ένα χρονικό διάστημα. Ένας επενδυτής προκειμένου να επενδύσει σε αυτό θέλει να γνωρίζει με μια πιθανότητα το ελάχιστο αλλά και μέγιστο της δεδομένης απόδοσης με στόχο να αποφύγει ενδεχόμενο μεγάλο ρίσκο μιας τέτοιας επένδυσης.
2. *Παράδειγμα Β*: Το ποσοστό των παραγόμενων ελαπωματικών προιόντων είναι γνωστό σε μια βιομηχανική επιχείρηση. Ποιό θα ήταν το ανώτερο και κατώτερο όριο των ελαπωματικών προιόντων που είναι δυνατόν να παραχθούν στο μέλλον;

Δ.Ε. για τον πληθυσμιακό μέσο μ

Έστω για τ.μς $X_1, \ldots, X_n$ προερχόμενες από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 τότε για $n \geq 30$ θα ισχύει:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Έτσι, δεδομένου ποσοστού σφάλματος α θα ισχύει:

$$P(Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{1-\alpha/2}),$$

όπου $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = \Phi(Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$, και $P(Z \leq Z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

Δ.Ε. για τον πληθυσμιακό μέσο μ (συν.)

Έτσι,

$$P\left(Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \rightarrow$$

$$P(-\bar{x}+Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n} \leq -\mu \leq -\bar{x}+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha \rightarrow$$

$$P(\bar{x}-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x}-Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha \rightarrow$$

$$P(\bar{x}-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x}+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha.$$

Εδώ ισχύει ότι $Z_{1-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2}$.

Δ.Ε. για τον πληθυσμιακό μέσο μ (σ-γνωστή)

1. $n \geq 30$ ή Κανονικά καταναμημένα X,

$$\bar{x} \pm Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. $n < 30$ και μη-Κανονικά καταναμημένα X,

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2,n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Δ.Ε. για τον πληθυσμιακό μέσο μ (σ-άγνωστη)

Όταν σ-άγνωστη και $n < 30$: χρησιμοποίησε τη δειγματική τυπική απόκλιση $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

όπου $t_{1-\alpha/2,n-1}$ t-Student Κατανομή με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για τον πληθυσμιακό μέσο μ

Έστω δείγμα με τιμές:

$$\{12,1 \mid 12,3 \mid 11,8 \mid 11,9 \mid 12,8 \mid 12,4\}$$

αυτές προέρχονται από Κανονικό πληθυσμό με τυπική απόκλιση ίση με 12. Να προσδιορίσετε το 95% διάστημα εμπιστοσύνη για τον πληθυσμιακό μέσο.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για τον πληθυσμιακό μέσο μ (λύση)

Προσδιορίζουμε τον δειγματικό μέσο,

$$\bar{x} = \frac{12,1 + 12,3 + 11,8 + 11,9 + 12,8 + 12,4}{6} = 12.21.$$

Επίσης, για 95% διάστημα εμπιστοσύνη, υποθέτουμε ποσοστό σφάλματος ίσο με 5%. Ακόμα, έχουμε $\sigma = 12$. Μέσω του πίκανα που ακολουθεί η κριτική τιμή $Z_{0.975} = 1,96$. Έτσι,

$$12,21 - 1,96 \cdot \frac{12}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq 12,21 + 1,96 \cdot \frac{12}{\sqrt{6}}$$

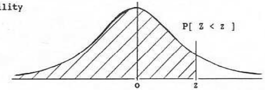
$$2.608 \leq \mu \leq 21.812$$

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[\ Z < z\ ] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\ dZ$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για την αναλογία

Έστω τ.μ. X δυαδικού αποτελέσματος $X \in \{0, 1\}$, τότε για δείγμα το $X_1, \ldots, X_n$ ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε την αναλογία

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Υποθέτοντας ότι το δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ από κοινού κατανέμεται σύμφωνα με τη Διωνυμική κατανομή, τότε για $n \geq 30$ και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη Cramer-Rao θα ισχύει ότι:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0, 1).$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για την αναλογία (συν.)

Εδώ θα έχουμε:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Έτσι, δεδομένου ποσοστού σφάλματος α, το Δ.Ε. για την αναλογία στον πληθυσμο θα είναι της μορφής:

$$P\left(\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right),$$

η οποία θα ισούται με $1 - \alpha$.

Τέλος Ενότητας