



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Υλικά Ι Ενότητα 6: Μηχανικές Ιδιότητες

Ασκήσεις

Δημήτρης Παπάζογλου
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης Creative Commons και ειδικότερα Αναφορά - Μη εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγο Έργο v. 3.0 (Attribution – Non Commercial – Non-derivatives)
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Μηχανικές Ιδιότητες

6.1 Ένα αντικείμενο μάζας 500 kg πρόκειται να «κρεμαστεί» για τις ανάγκες μιας έκθεσης χρησιμοποιώντας ένα χαλύβδινο σύρμα. **α)** Ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη διάμετρος του σύρματος θεωρώντας τον παράγοντα ασφαλείας ίσο με 2; **β)** Ποια θα είναι σε αυτή την περίπτωση η διαμήκης και ποια η εγκάρσια παραμόρφωση του σύρματος;
(δίνονται ο συντελεστής Poisson $\nu = 0.3$, το μέτρο ελαστικότητας $E = 200 \text{ GPa}$ και η αντοχή διαρροής του χάλυβα $\sigma_y = 1000 \text{ MPa}$, επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/sec}^2$)

Λύση:

α) Με παράγοντα ασφαλείας $N = 2$ η τάση εργασίας στο σύρμα θα είναι:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{N} = \frac{1000 \text{ MPa}}{2} = 500 \text{ MPa}$$

Η δύναμη εφελκυσμού που ασκείται στο σύρμα διαμέτρου D και διατομής S θα είναι

$$F = m \cdot g = 500 \text{ Kg} \cdot 10 \text{ m/sec}^2 = 5000 \text{ N}$$

Όμως

$$\sigma_w = \frac{F}{S} \Rightarrow S = \frac{F}{\sigma_w} = \frac{5000 \text{ N}}{500 \cdot 10^6 \text{ Pa}} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

Οπότε τελικά η ελάχιστη διάμετρος υπολογίζεται από την:

$$S = \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow D = 2 \sqrt{\frac{S}{\pi}} \simeq 0.0036 \text{ m} = 3.6 \text{ mm}$$

β) Γνωρίζουμε ότι η διαμήκης παραμόρφωση ε_z συνδέεται με την τάση μέσω της σταθεράς ελαστικότητας E :

$$\sigma_w = E \varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_w}{E} = \frac{500 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} = 2.5 \cdot 10^{-3}$$

Ενώ η εγκάρσια παραμόρφωση συνδέεται με την διαμήκη μέσω του συντελεστή Poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -0.3 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3} = -7.5 \cdot 10^{-4}$$

6.2 Ο χειριστής ενός γερανού επιχειρεί να σηκώσει κοντέινερ βάρους 10 τόνων με τη χρήση χαλύβδινου σύρματος διαμέτρου 10 mm. **α)** Θα τα καταφέρει; Σε κάθε περίπτωση, τι θα συμβεί στο σύρμα; **β)** Ποια είναι η ελάχιστη διάμετρος του σύρματος για να μπορεί ο γερανός να σηκώσει τέτοια φορτία με παράγοντα ασφαλείας ίσο με 4; Ποια θα είναι σε αυτή την περίπτωση η διαμήκης και ποια η εγκάρσια παραμόρφωση του σύρματος;

(δίνονται ο συντελεστής Poisson $\nu = 0.3$, το μέτρο ελαστικότητας $E = 200 \text{ GPa}$ και η αντοχή διαρροής του χάλυβα $\sigma_y = 1210 \text{ MPa}$, αντοχή σε εφελκυσμό $\sigma_M = 1380 \text{ MPa}$, επιτάχυνση βαρύτητας $g \sim 10 \text{ m/s}^2$)

Λύση:

α) Η δύναμη εφελκυσμού που ασκείται στο σύρμα είναι $F = m \cdot g = 10^4 \text{ Kg} \cdot 10 \text{ m/sec}^2 = 10^5 \text{ N}$, ενώ η τάση εργασίας στο σύρμα διαμέτρου D_o και διατομής $S_o = \pi \frac{D_o^2}{4} \cong 3.14 \cdot \frac{(10 \cdot 10^{-3})^2}{4} \text{ m}^2 \cong 78.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ θα είναι: $\sigma_w^o = \frac{F}{S_o} \cong \frac{10^5}{78.5 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cong 1274 \text{ MPa}$.

Η τιμή αυτή είναι $\sigma_y < \sigma_w < \sigma_M$ επομένως ο χειριστής θα τα καταφέρει αλλά το σύρμα θα παραμορφωθεί πλαστικά και θα πρέπει να αντικατασταθεί.

β) Με παράγοντα ασφαλείας $N=4$ η τάση εργασίας στο σύρμα θα είναι:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{N} = \frac{1210 \text{ MPa}}{4} = 302.5 \text{ MPa}.$$

Γνωρίζοντας ότι η δύναμη εφελκυσμού που θα ασκείται στο σύρμα είναι $F = 10^5 \text{ N}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την επιθυμητή διατομή: $\sigma_w = \frac{F}{S} \Rightarrow S = \frac{F}{\sigma_w} = \frac{10^5 \text{ N}}{302.5 \text{ MPa}} = 330.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

Τελικά η ελάχιστη διάμετρος υπολογίζεται από την: $S = \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow D = 2 \sqrt{\frac{S}{\pi}} \cong 20.5 \text{ mm}$.

Γνωρίζουμε ότι η διαμήκης παραμόρφωση ε_z συνδέεται με την τάση μέσω της σταθεράς

ελαστικότητας E : $\sigma_w = E \varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_w}{E} = \frac{302.5 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} \cong 1.510^{-3}$, ενώ η εγκάρσια παραμόρφωση

συνδέεται με την διαμήκη μέσω του συντελεστή Poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -0.3 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} = -4.5 \cdot 10^{-4}$$

6.3 Κατασκευαστής χαλύβδινων συρμάτων ισχυρίζεται ότι ένα σύρμα διαμέτρου 8 mm μπορεί να αντέξει εφελκυσμό φορτίου 3000 Kg. Μετά από μετρήσεις εφελκυσμού καταλήγετε στα ακόλουθα μεγέθη για τα σύρματα: μέτρο ελαστικότητας $E = 200 \text{ GPa}$, αντοχή διαρροής $\sigma_y = 1200 \text{ MPa}$ και αντοχή σε εφελκυσμό $\sigma_M = 1400 \text{ MPa}$. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του κατασκευαστή; Αν ναι, ποιος είναι ο παράγοντας ασφαλείας σε αυτή την περίπτωση; (επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Λύση:

Για να είναι σωστός ο ισχυρισμός του κατασκευαστή θα πρέπει η τάση λειτουργίας σ_w να είναι μικρότερη από την αντοχή διαρροής σ_y του χάλυβα.

Η δύναμη εφελκυσμού που ασκείται στο σύρμα διαμέτρου D και διατομής S θα είναι

$$F = m \cdot g = 3 \cdot 10^3 \text{ Kg} \cdot 10 \text{ m/sec}^2 = 3 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Έτσι η τάση λειτουργίας θα είναι:

$$\sigma_w = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{3 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \left(\frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{30}{16} 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cong 596.83 \text{ MPa}$$

Εφόσον η τάση λειτουργίας σ_w είναι μικρότερη από την αντοχή διαρροής σ_y ο ισχυρισμός του κατασκευαστή είναι σωστός!

Ο παράγοντας ασφαλείας σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$N = \frac{\sigma_y}{\sigma_w} = \frac{1200 \text{ MPa}}{596.83 \text{ MPa}} \cong 2$$

6.4 Χρειάζεται να επιλέξετε το οικονομικότερο σύρμα για να «κρεμαστεί» φορτίο 5000 Kg. Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα επιλέξτε το κατάλληλο σύρμα για την εφαρμογή και δικαιολογήστε την επιλογή σας. Ποια θα είναι η διαμήκης παραμόρφωση σε αυτή την περίπτωση; Προσοχή! Ο παράγοντας ασφαλείας δεν θα πρέπει να είναι μικρότερος του 2. (επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Διάμετρος (mm)	6	8	10	12	6	8	10	12
Μέτρο ελαστικότητας E (GPa)	200	200	200	200	150	150	150	150
Αντοχή Διαρροής σ_y (MPa)	1400	1400	1400	1400	1000	1000	1000	1000
Κόστος Euro/m	0.12	0.48	1.1	1.9	0.1	0.4	0.9	1.6

Λύση:

Η δύναμη εφελκυσμού που θα ασκείται στο σύρμα θα είναι:

$$F = m \cdot g = 5000 \cdot \text{Kg} \cdot 10 \text{ m/sec}^2 = 5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Παρατηρούμε ότι τα σύρματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες με βάση το μέτρο ελαστικότητας και την αντοχή διαρροής. Θεωρώντας ότι ο παράγοντας ασφαλείας θα είναι οριακά $N=2$ προκύπτει για την τάση εργασίας:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{N} = \begin{cases} \frac{1400}{2} \text{ MPa} = 700 \text{ MPa} & (\sigma_y = 1400 \text{ MPa}) \\ \frac{1000}{2} \text{ MPa} = 500 \text{ MPa} & (\sigma_y = 1000 \text{ MPa}) \end{cases}$$

Γνωρίζοντας της τάση εργασίας μπορούμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη διάμετρο σύρματος με την οποία μπορούμε να εργαστούμε με παράγοντα ασφάλειας τουλάχιστον 2:

$$\sigma_w \equiv \frac{F}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \Rightarrow D \geq 2 \sqrt{\frac{F}{\pi \sigma_w}} = \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \cdot 700 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2}} = \frac{1}{10\sqrt{35\pi}} \text{ m} \cong 9.5 \text{ mm} & (\sigma_y = 1400 \text{ MPa}) \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \cdot 500 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2}} = \frac{1}{50\sqrt{\pi}} \text{ m} \cong 11.3 \text{ mm} & (\sigma_y = 1000 \text{ MPa}) \end{cases}$$

Με βάση τα παραπάνω τις προδιαγραφές τις ικανοποιούν μόνο τα σύρματα 3, 4, και 8. Από αυτά το οικονομικότερο είναι το σύρμα 3 με χαρακτηριστικά: ($D = 10 \text{ mm}$, $\sigma_y = 1400 \text{ MPa}$, $E = 200 \text{ GPa}$, 1.1 Euro/m). Με αυτή την επιλογή ο παράγοντας ασφαλείας είναι τελικά:

$$\sigma_w^{real} = \frac{F}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{5 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \left(\frac{10}{2} \cdot 10^{-3} \text{ m}\right)^2} \cong 636.6 \text{ MPa} \Rightarrow N^{real} = \frac{\sigma_y}{\sigma_w^{real}} = \frac{1400 \text{ MPa}}{636.6 \text{ MPa}} \cong 2.2$$

Σε αυτή την περίπτωση η διαμήκης παραμόρφωση ε_z μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σταθεράς ελαστικότητας E και της τάσης εργασίας:

$$\sigma_w = E \varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_w}{E} = \frac{700 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} \cong 3.5 \cdot 10^{-3}$$

6.5 Χαλύβδινα σύρματα διαμέτρου 12 mm πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σε μια κρεμαστή γέφυρα. Τα σύρματα έχουν σχεδιαστεί να λειτουργούν με φορτίο μάζας 3000 kg /σύρμα σε θερμοκρασία $20\text{ }^\circ\text{C}$. Ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία τα σύρματα θα λειτουργούν χωρίς ο παράγοντας ασφαλείας να γίνει μικρότερος από 3;

(δίνονται ο συντελεστής Poisson $\nu = 0.3$, το μέτρο ελαστικότητας $E = 200\text{ GPa}$, η αντοχή διαρροής $\sigma_y = 1000\text{ MPa}$ και ο συντελεστής θερμικής διαστολής του χάλυβα $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{ m/sec}^2$)

Λύση* :

Αφού τα σύρματα είναι πακτωμένα θα ασκείται πάνω τους μια εφελκυστική τάση:

$$\sigma_o = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{3000\text{ kg} \cdot 10\text{ m/s}^2}{\pi 36 \cdot 10^{-6}\text{ m}} \cong 265.2\text{ MPa}$$

όπου D η διάμετρος του σύρματος. Έτσι σε θερμοκρασία $20\text{ }^\circ\text{C}$ η κατασκευή λειτουργεί με παράγοντα ασφαλείας $N = \frac{\sigma_y}{\sigma_o} = \frac{1000\text{ MPa}}{265.2\text{ MPa}} \cong 3.77$. Η μείωση της θερμοκρασίας, λόγω της

επαγόμενης συστολής αυξάνει την εφελκυστική τάση. Η επιπλέον εφελκυστική τάση μπορεί να υπολογιστεί από την:

$$\sigma_{th} = -E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

όπου ΔT η μεταβολή της θερμοκρασίας. Έτσι η συνολική εφελκυστική τάση στα σύρματα θα είναι:

$$\sigma_{tot} = \sigma_o - E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο παράγοντας ασφαλείας σε κάθε περίπτωση θα δίνεται από την σχέση:

$$N = \frac{\sigma_y}{\sigma_{tot}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_o - E \cdot \alpha \cdot \Delta T}$$

Ο παράγοντας ασφαλείας δεν μπορεί να είναι μικρότερος του 3 οπότε:

$$N = \frac{\sigma_y}{\sigma_{tot}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_o - E \cdot \alpha \cdot \Delta T} \geq 3 \Rightarrow \sigma_y \geq 3(\sigma_o - E \cdot \alpha \cdot \Delta T)$$

$$\Rightarrow \Delta T \geq -\frac{\sigma_y/3 - \sigma_o}{E \cdot \alpha} = -\frac{1000/3\text{ MPa} - 265.2\text{ MPa}}{200\text{ GPa} \cdot 13 \cdot 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}} \cong -26.2\text{ }^\circ\text{C}$$

Επομένως η ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία ο παράγοντας ασφαλείας μειώνεται οριακά στο 3 είναι $20\text{ }^\circ\text{C} - 26.2\text{ }^\circ\text{C} = -6.2\text{ }^\circ\text{C}$.

* Για να λυθεί αυτή η άσκηση απαιτούνται γνώσεις Θερμικών ιδιοτήτων (ενότητα 6)

Άλυτες Ασκήσεις

6.6 Ένας γερανός πρόκειται να μεταφέρει κοντέινερ μάζας $20 \cdot 10^3$ Kg με την βοήθεια ενός χαλύβδινου σύρματος. Ποια θα είναι η ελάχιστη διάμετρος του σύρματος έτσι ώστε το φορτίο να μεταφερθεί τουλάχιστον μία φορά χωρίς το σύρμα να σπάσει και ποια αν ο παράγοντας ασφαλείας είναι ίσος με 2; (δίνονται: το μέτρο ελαστικότητας $E = 200$ GPa, η αντοχή διαρροής $\sigma_y = 250$ MPa και η αντοχή σε εφελκυσμό $\sigma_M = 400$ MPa του χάλυβα, $g \sim 10$ m/sec²)

Απάντηση: για τουλάχιστον 1 φορά χωρίς να σπάσει $D \cong 25.2$ mm, $D_{N=2} \cong 45.1$ mm

6.7 Κατασκευαστής χαλύβδινων συρμάτων ισχυρίζεται ότι ένα σύρμα διαμέτρου 1 mm, που θα χρησιμοποιηθεί σε ρομποτικό βραχίονα σε διαστημική αποστολή στον Άρη, μπορεί να αντέξει εφελκυσμό φορτίου 120 Kg. Μετά από μετρήσεις εφελκυσμού καταλήγεται στα ακόλουθα μεγέθη για τα σύρματα: μέτρο ελαστικότητας $E = 200$ GPa, αντοχή διαρροής $\sigma_y = 1200$ MPa και αντοχή σε εφελκυσμό $\sigma_M = 1400$ MPa. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του κατασκευαστή; Αν ναι, ποιος είναι ο παράγοντας ασφαλείας σε αυτή την περίπτωση; (επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη $g \cong 4$ m/s², επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της Γής $g \cong 10$ m/s²)

Απάντηση: ο ισχυρισμός του κατασκευαστή είναι σωστός!, $N \cong 1.96$

6.8 Χαλύβδινα σύρματα διαμέτρου 5 mm πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σε μια κρεμαστή γέφυρα. Τα σύρματα έχουν σχεδιαστεί να λειτουργούν με φορτίο μάζας 500 kg/σύρμα σε θερμοκρασία 20 °C. Ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία τα σύρματα θα λειτουργούν χωρίς ο παράγοντας ασφαλείας να γίνει μικρότερος από 2; (δίνονται ο συντελεστής Poisson $\nu = 0.3$, το μέτρο ελαστικότητας $E = 200$ GPa, η αντοχή διαρροής $\sigma_y = 1000$ MPa και ο συντελεστής θερμικής διαστολής του χάλυβα $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹, η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10$ m/sec²)

Απάντηση[†]: Η ελάχιστη θερμοκρασία είναι -19.2 °C

Τέλος Ασκήσεων Ενότητας

[†] Για να λυθεί αυτή η άσκηση απαιτούνται γνώσεις Θερμικών ιδιοτήτων (ενότητα 6)