ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τίτλος Μαθήματος: Πραγματική Ανάλυση

Ενότητα: **Στοιχειώδης Τοπολογία του R.**

Όνομα Καθηγητή: **Θ. Μίτσης**

Τμήμα: **Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών**

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Στοιχειώδης τοπολογία τού $\mathbb{R}$ σε 1 σελίδα και 3 σειρές

Ανοιχτά σύνολα

Ορισμός. *Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε κάθε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το x ονομάζεται* **περιοχή** *τού x. Ένα σύνολο G ονομάζεται* **ανοιχτό** *αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει περιοχή U τού x με $U \subset G$.*

Παραδείγματα. Κάθε ανοιχτό διάστημα είναι ανοιχτό σύνολο. Κανένα διάστημα άλλου τύπου δεν είναι ανοιχτό σύνολο. Τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των άρρητων δεν είναι ανοιχτά σύνολα. Ολόκληρο το $\mathbb{R}$ είναι ανοιχτό.

Παρατήρηση. Κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένωση ανοιχτών διαστημάτων με ρητά άκρα. Επίσης, κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων.

Παρατήρηση. Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ορολογία περιοχών, ο ορισμός τής σύγκλισης παίρνει την ακόλουθη μορφή. Η ακολουθία x_n τείνει στο x αν και μόνο αν για κάθε περιοχή U τού x, υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε $x_n \in U$. Δηλαδή για κάθε περιοχή τού x η ακολουθία τελικά βρίσκεται μέσα στην περιοχή. Ανάλογα, ο ορισμός τής συνέχειας παίρνει την ακόλουθη μορφή. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε περιοχή W τού $f(x_0)$ υπάρχει περιοχή U τού x_0 τέτοια ώστε $f(U) \subset W$.

Θεώρημα. *Κάθε ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο. Κάθε πεπερασμένη τομή ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.*

Παρατήρηση. Μια άπειρη τομή ανοιχτών συνόλων δεν είναι αναγκαστικά ανοιχτό σύνολο. Για παράδειγμα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n) = \{0\}.$$

Θεώρημα. *Αν G_i, $i \in I$, είναι μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων, τότε υπάρχει $A \subset I$ αριθμήσιμο τέτοιο ώστε*

$$\bigcup_{i \in I} G_i = \bigcup_{i \in A} G_i.$$

Κλειστά σύνολα

Ορισμός. *Ένα σύνολο λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό.*

Παραδείγματα. Κάθε κλειστό διάστημα είναι κλειστό σύνολο. Κανένα διάστημα άλλου τύπου δεν είναι κλειστό σύνολο. Τα σύνολα των φυσικών και των ακεραίων είναι κλειστά. Τα σύνολα των ρητών και των αρρήτων δεν είναι κλειστά. Ολόκληρο το $\mathbb{R}$ είναι κλειστό.

Παρατήρηση. Το μοναδικό μη κενό σύνολο το οποίο είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό είναι το $\mathbb{R}$.

Θεώρημα. *Κάθε τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Κάθε πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

Παρατήρηση. Μια άπειρη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι αναγκαστικά κλειστό σύνολο. Για παράδειγμα

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[-2 + 1/n, 2 - 1/n] = (-2, 2).$$

Θεώρημα. *Ένα σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \to x$ έχουμε $x \in A$. Δηλαδή όλες οι συγκλίνουσες ακολουθίες στοιχείων τού A συγκλίνουν σε στοιχεία τού A.*

Θεώρημα. *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f είναι συνεχής.*
(2) *Η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο.*
(3) *Η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού συνόλου είναι κλειστό σύνολο.*

Συμπαγή σύνολα

Ορισμός. *Ένα σύνολο A λέγεται* **συμπαγές** *αν για κάθε οικογένεια ανοιχτών συνόλων G_i, $i \in I$, με $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, υπάρχει πεπερασμένο $F \subset I$ τέτοιο ώστε $A \subset \bigcup_{i \in F} G_i$. Δηλαδή κάθε ανοιχτή κάλυψη τού A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.*

Θεώρημα. *Αν το $A \subset A$ είναι ένα σύνολο, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Το A είναι συμπαγές.*
(2) *Το A είναι κλειστό και φραγμένο.*

(3) *Κάθε ακολουθία στοιχείων τού A έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο τού A.*

Θεώρημα. *Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*