ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

3ο μέρος σημειώσεων:
Μέθοδος της Επίλυσης

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Χρηματοδότηση

1. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

2. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

3. Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

4.3 Ορθότητα και Πληρότητα

Συστήματα αποδείξεων όπως η μορφολογική παραγωγή και η κατασκευή μοντέλων χρησιμοποιούνται για να δείξουμε την εγκυρότητα εξαγωγών συμπερασμάτων. Ένα σύστημα αποδείξεων μπορεί να αποτύχει: να απαντήσει ότι μια εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη ενώ στην πραγματικότητα είναι μη-έγκυρη. Για παράδειγμα η εξαγωγή συμπεράσματος $\{P \to Q, Q\} / P$ είναι μη-έγκυρη.

Ένα σύστημα αποδείξεων λέγεται ορθό αν οποτεδήποτε υποδεικνύει μια εξαγωγή συμπεράσματος ως έγκυρη, αυτή είναι πράγματι έγκυρη.

Ένα σύστημα αποδείξεων μπορεί επίσης να αποτύχει με το να χαρακτηρίσει ως μη-έγκυρη μια έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος. Ένα σύστημα αποδείξεων λέγεται πλήρες αν προσδιορίζει κάθε έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος ως έγκυρη. Για παράδειγμα, ένα σύστημα που δεν μπορεί να χαρακτηρίσει την εξαγωγή συμπεράσματος $\{P \vee Q, \neg P\} / Q$ ως έγκυρη είναι μη-πλήρες.

Οι ιδιότητες της ορθότητας και της πληρότητας είναι επιθυμητές για κάθε σύστημα αποδείξεων. Δεν είναι όμως πάντα εύκολο να επιτευχθούν και οι δύο.

Ορισμός Μια πρόταση Α παράγεται από ένα σύνολο προτάσεων S σύμφωνα με ένα σύστημα αποδείξεων PS, αν το PS προσδιορίζει την Α σαν λογική συνέπεια του S. Συμβολισμός : S $|-_{PS}$ A.

Στη μορφολογική παραγωγή, η Α παράγεται από το S αν υπάρχει αν υπάρχει παραγωγή από το S χρησιμοποιώντας τους κανόνες της μορφολογικής παραγωγής. Στην κατασκευή μοντέλων η Α παράγεται από το S αν το σύνολο $\{S \cup \{\neg A\}\}$ μπορεί να αναχθεί στο κενό σύνολο με τη χρήση των κανόνων αντικατάστασης.

Ορισμοί

1. Ένα σύστημα αποδείξεων PS είναι ορθό αν $S \models A$ όποτε S $|-_{PS}$ A.
2. Ένα σύστημα αποδείξεων PS είναι πλήρες αν S $|-_{PS}$ A όποτε $S \models A$.
3. Ένα σύστημα αποδείξεων PS είναι ορθό και πλήρες αν S $|-_{PS}$ A αν και μόνο αν $S \models A$.

Παραδείγματα:

1. Θεωρείστε το σύστημα PS_1 για το οποίο ισχύει S $|-_{PS1}$ A αν και μόνο αν A $A \in S$. Για το PS_1 η εξαγωγή συμπεράσματος $\{P, Q\} / P$ είναι έγκυρη αλλά η $\{P \to Q, P\} / Q$ είναι μη-έγκυρη. Είναι το σύστημα ορθό; Αν $A \in S$ τότε $S \models A$. Άρα, αν S $|-_{PS1}$ A, τότε $A \in S$ και επομένως $S \models A$. Άρα είναι ορθό. Είναι και πλήρες; Όχι, γιατί δεν αναγνωρίζει έγκυρες εξαγωγές συμπερασμάτων.
2. Θεωρείστε το σύστημα PS_2 για το οποίο ισχύει S $|-_{PS2}$ A για κάθε A. Δηλαδή αναγνωρίζει κάθε εξαγωγή συμπεράσματος ως έγκυρη. Είναι ορθό; Όχι, γιατί αναγνωρίζει ως έγκυρες και τις μη-έγκυρες εξαγωγές συμπεράσματος. Είναι πληρές; Ναι, γιατί χαρακτηρίζει σωστά ως έγκυρες όλες τις έγκυρες εξαγωγές συμπερασμάτων.

Τα PS_1 και PS_2 δεν μας είναι χρήσιμα. Χρησιμότερο θα ήταν ένα σύστημα που χαρακτηρίζει ως έγκυρες τις έγκυρες εξαγωγές συμπερασμάτων και μόνο αυτές. Η κατασκευή μοντέλων είναι ορθό και πλήρες σύστημα.

4.4 Πολυπλοκότητα των Συστημάτων Αποδείξεων

Η πολυπλοκότητα ενός αλγόριθμου είναι ένα μέτρο της αποδοτικότητάς του. Συνήθως εκφράζεται σαν μια συνάρτηση η οποία σχετίζει τον αριθμό των υπολογιστικών βημάτων που απαιτούνται με το μέγεθος των δεδομένων εισόδου. Στην περίπτωση των συστημάτων αποδείξεων το πρόβλημα προσδιορισμού της πολυπλοκότητας εκφράζεται ως εξής :

> Για ένα σύστημα PS βρείτε μια συνάρτηση f έτσι ώστε, η εγκυρότητα ή μη-εγκυρότητα μιας εξαγωγής συμπεράσματος που περιέχει n σύμβολα μπορεί να προσδιοριστεί από το PS σε $f(n)$ το πολύ βήματα.

Για παράδειγμα, για τη μέθοδο των πινάκων αληθείας και για την εξαγωγή συμπεράσματος $\{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{n-1}\}\ /\ P_n$, όπου τα $P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n$ είναι διακεκριμένα γράμματα, ο πίνακας αλήθειας θα έχει 2^n γραμμές. Άρα η f είναι εκθετική. Καθώς μια εξαγωγή συμπεράσματος με n σύμβολα δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από n γράμματα, ο πίνακας αληθείας δεν μπορεί να περιέχει περισσότερες από 2^n γραμμές. Άρα η πολυπλοκότητα της μεθόδου είναι εκθετική.

Και άλλα συστήματα έχουν εκθετική πολυπλοκότητα στη χειρότερη περίπτωση. Υπάρχουν και περιπτώσεις που είναι απλούστερες, αλλά πάντα υπάρχουν άλλες στις οποίες απαιτείται εκθετικός αριθμός βημάτων.

Ο έλεγχος της εγκυρότητας των εξαγωγών συμπερασμάτων του Prop, ανήκει σε μια κλάση προβλημάτων που είναι γνωστή με το όνομα NP-Πλήρη (NP-Complete) προβλήματα. Υπάρχουν διάφορα είδη NP-Πλήρων Προβλημάτων. Για τις ανάγκες μας, μας αρκεί να εξετάσουμε τα λεγόμενα NP-Πλήρη Προβλήματα Αποφάσεων.

Ένα πρόβλημα απόφασης είναι ένα πρόβλημα στο οποίο απαιτείται μια απάντηση της μορφής ‘ναι/όχι’. Για παράδειγμα, το πρόβλημα ‘αποφάσισε αν ένας ακέραιος είναι πρώτος’ είναι πρόβλημα απόφασης, ενώ το πρόβλημα ‘βρείτε τους πρώτους παράγοντες ενός ακέραιου’ δεν είναι.

Για την περίπτωση του Prop, το πρόβλημα ‘αποφασίστε αν μια δεδομένη εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη’ είναι ένα πρόβλημα απόφασης. Σχετίζεται στενά με ένα άλλο πρόβλημα απόφασης: ‘αποφασίστε αν μια πρόταση του Prop είναι ικανοποιήσιμη ή όχι’ (SAT).

4.4.1 Προβλήματα NP

Τα δεδομένα ενός προβλήματος απόφασης για τα οποία η ορθή απάντηση είναι ‘ναι’ λέγονται θετικά ενώ εκείνα για τα οποία η απάντηση είναι ‘όχι’ λέγονται αρνητικά. Έστω ότι κάθε είσοδος για ένα πρόβλημα μπορεί να πάρει ένα πιστοποιητικό, το οποίο είναι κάποια έκφραση η οποία ελέγχεται εύκολα για το αν ικανοποιεί η αντίστοιχη είσοδος το πρόβλημα. Π.χ., για το πρόβλημα SAT ένα τέτοιο πιστοποιητικό είναι μια ερμηνεία που ικανοποιεί την πρόταση.

Ένα πρόβλημα απόφασης Q λέγεται NP (non-deterministic polynomial) αν έχει τις παραπάνω ιδιότητες:

4. Κάθε θετική είσοδος έχει ένα πιστοποιητικό.
5. Υπάρχει αλγόριθμος A_Q ο οποίος δέχεται ως είσοδο οποιοδήποτε είσοδο I του Q μαζί με πιστοποιητικό C (αν υπάρχει) και απαντά 'ναι' αν το C είναι πιστοποιητικό του I και 'όχι' αν δεν είναι.
6. ο αλγόριθμος είναι πολυωνυμικού χρόνου, δηλαδή υπάρχει ακέραιος k και μια σταθερά c, έτσι ώστε ο αριθμός των βημάτων που εκτελεί ο A_Q για να διαπιστώσει αν το C είναι πιστοποιητικό του I, είναι το πολύ cn^k, όπου n είναι το μέγεθος του I.

Το πρόβλημα SAT είναι πρόβλημα NP. Μια πρόταση με n σύμβολα περιέχει το πολύ n-1 συνδετικά. Κάθε ερμηνεία της πρότασης είναι ένα πιστοποιητικό: αρκεί να υπολογίσουμε μια γραμμή του πίνακα αληθείας η οποία αντιστοιχεί στην ερμηνεία. Χρειαζόμαστε n-1 βήματα για μια γραμμή του πίνακα. Άρα $f(n) = n-1 < 2^n$. Το SAT έχει μια ακόμα ιδιότητα: αν Q είναι οποιοδήποτε άλλο NP πρόβλημα, υπάρχει ένας συστηματικός τρόπος για να μετατρέψουμε την είδοσο I του Q στην είσοδο I' του SAT, έτσι ώστε οι θετικές εισόδοι του Q να μετατρέπονται σε θετικές εισόδους του SAT και αντίστοιχα οι αρνητικές. Επιπλέον, ο αλγόριθμος μετατροπής είναι πολυωνυμικός.

Τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι κανένα NP πρόβλημα δεν είναι πιο δύσκολο από το SAT παρά μόνο κατά μια διαδικασία πολυωνυμικού χρόνου.

Ένα πρόβλημα λέγεται NP-Πλήρες αν είναι NP και κάθε άλλο NP πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε αυτό σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα NP προβλήματα που δεν μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο (όλα τα NP Πλήρη). Αν οποιοδήποτε NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε κάθε NP πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Αν μπορούσαμε να λύσουμε κάποιο NP-Πλήρες πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε θα απαντούσαμε ένα από τα μεγάλα ανοιχτά ερωτήματα της θεωρίας των υπολογισμών: $P \stackrel{?}{=} NP$.

Το SAT ήταν το πρώτο NP-Πλήρες πρόβλημα που ανακαλύφθηκε.

<u>Θεώρημα</u> (Cook 1971). Το SAT είναι NP-Πλήρες.

Άρα και ο έλεγχος μη-εκυρότητας είναι NP-Πλήρες πρόβλημα. Σημαίνει αυτό ότι δεν έχουμε ελπίδες για την αυτόματη απόδειξη θεωρημάτων; Όχι, στην πράξη, τα περισσότερα προβλήματα λύνονται σε αποδεκτό χρόνο. Επίσης, χρησιμοποιούμε μεθόδους οι οποίες περιορίζονται σε κάποιες ειδικής μορφής προτάσεις.

4.5 Μέθοδος της Επίλυσης (Resolution)

Η μέθοδος της επίλυσης διαφέρει από τη μορφολογική παραγωγή και την κατασκευή μοντέλων στο ότι αφορά προτασιακά σχήματα περιορισμένης μορφής.

<u>Ορισμοί</u>

- Ένας <u>όρος</u> είναι μια διάζευξη γραμμάτων. Π.χ. P Ï $Q, \Psi P$ Ï ΨQ Ï R, P Ï Q Ï ΨR Ï S. Καθώς μια διάζευξη είναι μεταθετική, ο όρος P Ï Q Ï ΨR είναι ισοδύναμος με τον όρο P Ï ΨR Ï Q και με τον ΨR Ï Q Ï P. Συχνά θεωρούμε τον έναν όρο σαν ένα σύνολο γραμμάτων, επομένως η σειρά με την οποία τα γράμματα εμφανίζονται δεν έχει σημασία. Οι παραπάνω όροι γράφονται ως *{P,Q* , *{*$\Psi P, \Psi Q, R$*}* και $\{P, Q, \Psi R, S\}$ αντίστοιχα. Τα σύνολα *{P,Q}* και $\{Q,P\}$ απεικονίζουν τον ίδιο όρο.
- Ένας <u>μοναδιαίος όρος</u> είναι ένας όρος που αποτελείται από ένα και μόνο γράμμα. Π.χ {P}, $\{\Psi Q\}$. Οι μοναδιαίοι όροι γράφονται και χωρίς {,}, δηλαδή ως P και ΨQ αντίστοιχα.
- Ο <u>κενός όρος</u> που συμβολίζεται με F, συμβολίζει μια αντινομία.
- Ο όρος Τ αντιστοιχεί σε ένα σύνολο που περιέχει ένα γράμμα και την άρνησή του.$\{P, Q, \Psi P\}$.

Κάθε σύνολο προτασιακών σχημάτων μπορεί να μετατραπεί σε έναν σύνολο όρων : πρώτα μετατρέπεται σε συζευκτική κανονική μορφή και κατόπιν διαχωρίζονται οι διαζεύξεις. Κάθε διάζευξη είναι ένας όρος.

Η μέθοδος της επίλυσης βασίζεται στην εγκυρότητα εξαγωγών συμπερασμάτων της μορφής $\{P$ Ï $Q, \Psi Q$ Ï $R\} \models P$ Ï R. Αν P Ï R είναι ψευδής, τότε και P και R είναι ψευδείς. Αν Q είναι ψευδής, τότε και P Ï Q θα είναι ψευδής. Αν Q είναι αληθής, τότε και ΨQ Ï R θα είναι ψευδής. Άρα, κάποια υπόθεση θα είναι ψευδής. Επομένως, αν οι υποθέσεις είναι αληθείς, τότε και το συμπέρασμα θα είναι αληθές. Ο όρος $\{P,R\}$ ονομάζεται <u>όρος επίλυσης</u> των $\{P,Q\}$ και $\{\Psi Q, R\}$.

Αν δύο όροι C και C' περιέχουν τα γράμματα A και ΨA αντίστοιχα, οι όροι <u>επιλύονται</u> και παράγουν έναν καινούριο όρο ο οποίος περιέχει όλα τα γράμματα του C πλην του A και όλα τα γράμματα του C' πλην του ΨA.

res(C,C') = (C-{A}) Θ (C'-{ΨA})

ή

res(K Θ {A}, K' Θ {ΨA }) = (K Θ K')

<u>Παραδείγματα</u>

- res($\{P, \Psi Q, R\}$, $\{Q, R, \Psi S\}$) = $\{P, R, \Psi S\}$
- res(Q, $\{\Psi P, \Psi Q, R\}$) = $\{\Psi P, R\}$
- res(P, ΨP) = **F**
- res($\{P, \Psi Q\}, Q$) = P
- res($\{P, \Psi Q, R\}$, $\{Q, \Psi R, S\}$) = $\{P, R, \Psi R, S\}$ =$\{P, Q, \Psi Q, S\}$ = **T**

Αν δύο όροι έχουν κάποιο όρο επίλυσης res(C, C'), τότε {C, C'} |= res(C, C'). Γενικότερα, { K Θ {A}, K' Θ {ΨA }} |= K Θ K'. Για να διαπιστώσουμε ότι αυτό ισχύει, ας υποθέσουμε για κάποια ερμηνεία το συμπέρασμα είναι ψευδές. Αν Α είναι αληθές τότε Κ’ Θ{ΨΑ } είναι ψευδές, ενώ αν Α είναι ψευδές τότε Κ Θ {Α}είναι ψευδές. Σε κάθε περίπτωση, μια από τις υποθέσεις είναι ψευδής. Άρα αν οι υποθέσεις είναι αληθείς για κάποια ερμηνεία, τότε και το συμπέρασμα είναι αληθές.

Γιατί όμως μας είναι χρήσιμο αυτό. Αν S |= C, τότε το S είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν το S Θ C είναι ικανοποιήσιμο. Άρα αφού {C, C’} |= res(C, C’) το {C, C’}θα είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν το σύνολο {C, C’, res(C, C’)} είναι ικανοποιήσιμο. Γενικότερα, αν S είναι οποιοδήποτε σύνολο όρων και R είναι ένας όρος επίλυσης οποιονδήποτε δύο από αυτούς, τότε το S είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν το S Θ {R} είναι ικανοποιήσιμο.

<u>Αρχή της επίλυσης</u> Έστω S ένα σύνολο όρων και R(S) το σύνολο που προκύπτει αν προσθέσουμε στο S όλους τους όρους επίλυσης των μελών του. Τότε το S είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν το R(S) είναι ικανοποιήσιμο.

<u>Παράδειγμα</u> Δείξτε ότι το σύνολο S = $\{\{\Psi P, Q\}$, $\{\Psi Q, R\}$,P, ΨR} είναι μη ικανοποιήσιμο.

Πρώτα βρίσκουμε τους όρους της επίλυσης

res($\{\Psi P, Q\}$, $\{\Psi Q, R\}$) = $\{\Psi P, R\}$

res($\{\Psi P, Q\}$, P) = Q

res($\{\Psi Q, R\}$, ΨR) = ΨQ

R(S) = $\{\{\Psi P, Q\}$, $\{\Psi Q, R\}$,P, ΨR, $\{\Psi P, R\}$,Q, $\Psi Q\}$

Αυτό το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο γιατί περιέχει Q και ΨQ. Άρα, βάσει της αρχής της επίλυσης, το S θα είναι μη-ικανοποιήσιμο.

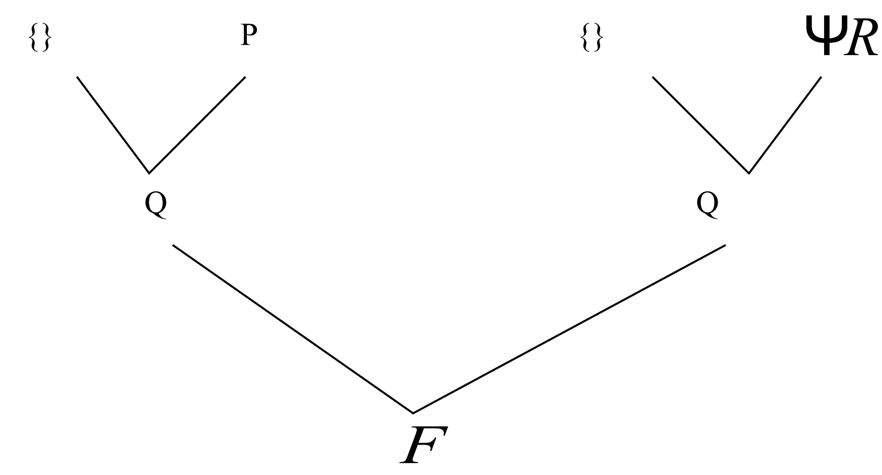
Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε υπολογίζοντας το

R(R(S)) = $\{\{\Psi P, Q\}$, $\{\Psi Q, R\}$,P, ΨR, $\{\Psi P, R\}$,Q, ΨQ, $\Psi P, R$, **F**}

Η αρχή της επίλυσης μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Έστω S ένα σύνολο όρων και **R** η πράξη της προσθήκης των όρων επίλυσης. Αν για κάποιο ακέραιο n, **F** Ξ R^n(S), τότε το S είναι μη-ικανοποιήσιμο.

Η διαδικασία της επίλυσης μπορεί να αναπαρασταθεί και με τη μορφή δέντρου.

Για παράδειγμα :

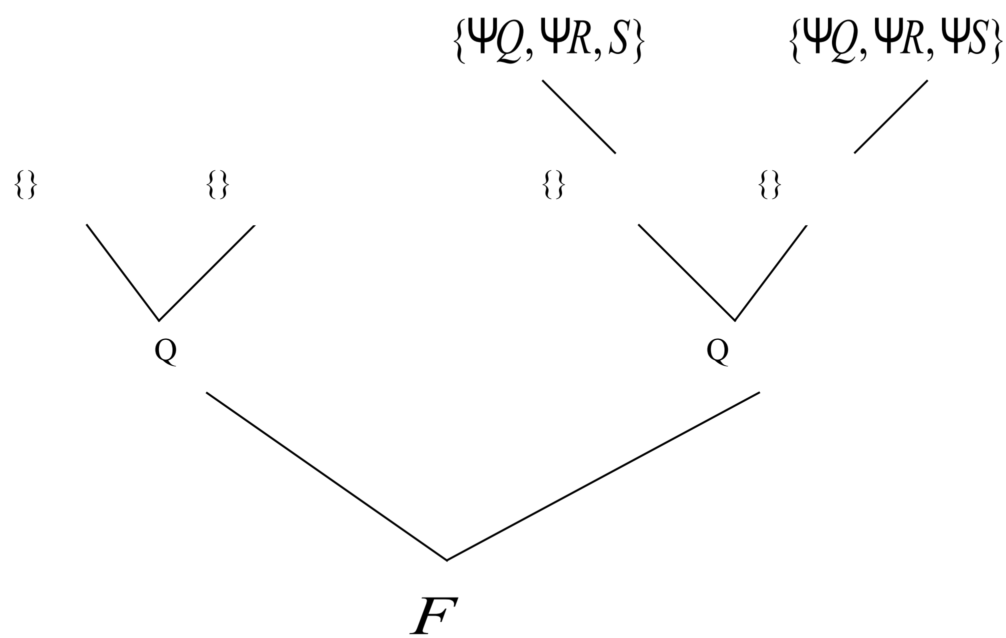


Ένα δέντρο επίλυσης για ένα σύνολο S είναι ένα δυαδικό δέντρο όπου κάθε φύλλο περιέχει ένα μέλος του S και κάθε ενδιάμεσος κόμβος περιέχει τον όρο επίλυσης των άμεσων απογόνων του στο δέντρο. Αν επιπλέον η ρίζα του δέντρου περιέχει τον όρο **F** τότε το δέντρο επίλυσης λέγεται <u>δέντρο ανασκευής.</u>

Άν ένα σύνολο έχει ένα δέντρο ανασκευής, τότε είναι μη-ικανοποιήσιμο.

<u>Παράδειγμα</u> Δείξτε ότι το σύνολο

$S=\{\{P,Q\},\{\Psi P,Q\},\{\Psi Q,R\},\{\Psi Q,\Psi R,S\},\{\Psi Q,\Psi R,\Psi S\}\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο.



<u>Θεώρημα</u> Η μέθοδος της επίλυσης είναι ορθή.

Απόδειξη Προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε σύνολο προτασιακών σχημάτων είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο όρων.

Είναι η μέθοδος πλήρης. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει δέντρο ανασκευής για κάποιο σύνολο S. Σημαίνει αυτό ότι το S είναι μη-ικανοποιήσιμο. Για να το δείξουμε αυτό, πρέπει να δείξουμε ότι κάθε μη-ικανοποιήσιμο σύνολο όρων έχει ένα δέντρο ανασκευής.

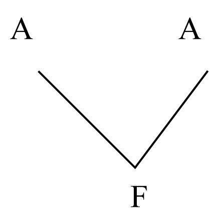
Υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος κατασκευάζει ένα δέντρο ανασκευής για ένα οποιοδήποτε μη-ικανοποιήσιμο σύνολο όρων.

Αλγόριθμος

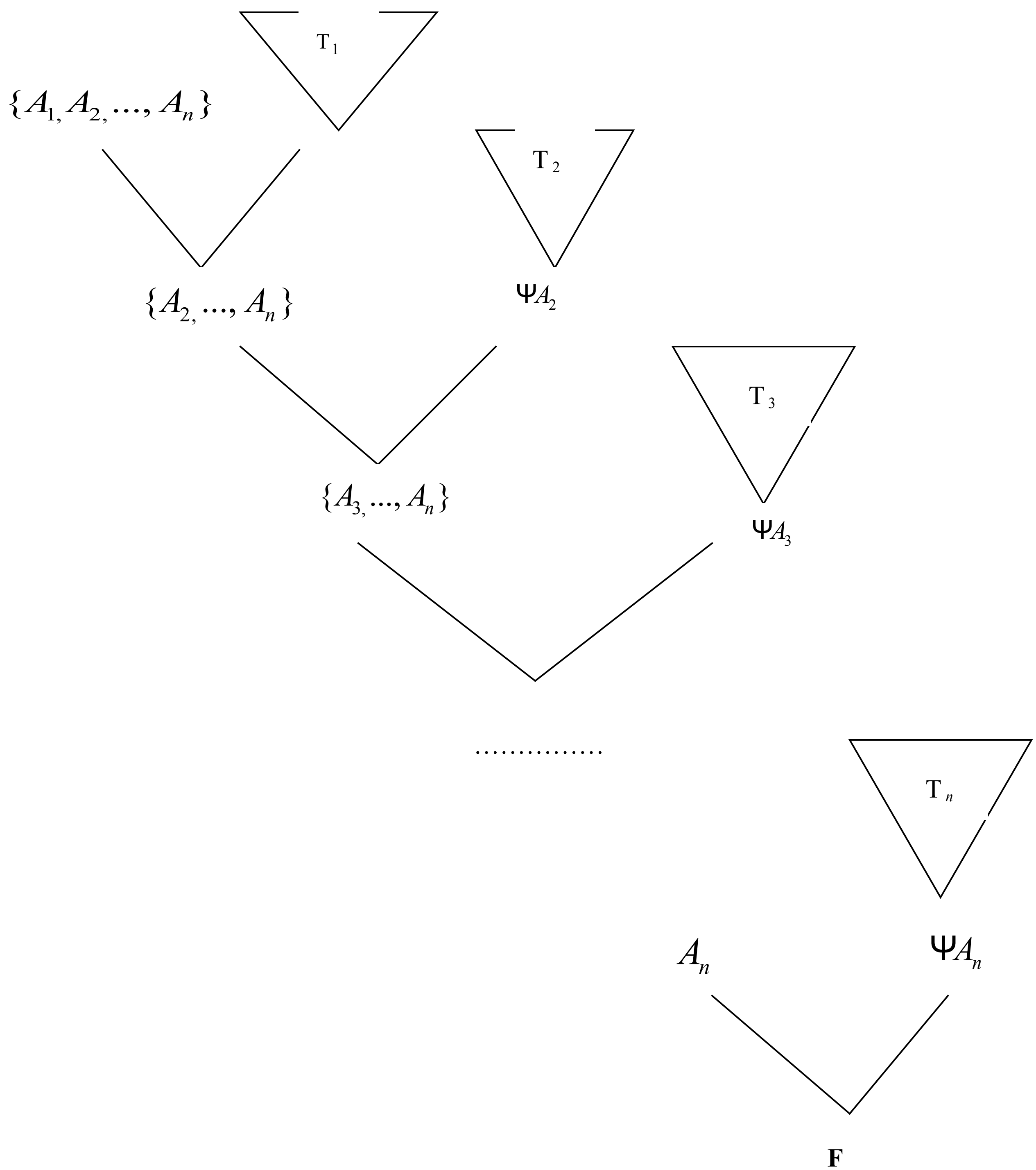
Input: ένα σύνολο όρων S

Output: αν το S είναι μη-ικανοποιήσιμο, ένα δένδρο ανασκευής για το S, διαφορετικά μήνυμα για την μη-εύρεση δέντρου.

1. Αν για κάποιο γράμμα A, το A και το ΨA είναι μέλη του S, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει επιστρέφοντας το δέντρο



2. Αν κάθε όρος του S περιέχει ένα αρνητικό γράμμα, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει ως αποτέλεσμα ένδειξη αποτυχίας.
3. Έστω $C = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$ ένας όρος του S όπου κάθε A_J είναι θετικό και έστω i := 1.
4. Αν $\Psi A_i \,\Xi\, S$, τότε έστω T_i το δέντρο με μόνο κόμβο το ΨA_i. Πήγαινε στο βήμα 8.
5. Για κάθε όρο $K \,\Xi\, S - \{C\}$, έστω $K' = K - \{\Psi A_i\}$. Το K' καλείται αντίστοιχος όρος του K. Αν $\Psi A_i \,\mathrm{O}\, K$, τότε $K' = K$). Έστω $S_i = \{K' | K \,\Xi\, S - \{C\}\}$.
6. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο S_i. Αν ο αλγόριθμος επιστρέψει «αποτυχία», τότε επιστρέφουμε «αποτυχία» και τερματίζουμε. Αλλιώς ο αλγόριθμος επιστρέφει το δέντρο ανασκευής T_i' και συνεχίζει στο βήμα 7.
7. Έστω T_i το δέντρο που προκύπτει από το T_i' με την αντικατάσταση κάθε φύλλου του T_i' με τον όρο του S του οποίου είναι αντίστοιχο και αναμορφώνουμε το δέντρο. Αν η ρίζα του T_i είναι **F**, πήγαινε στο βήμα 10.
8. Αν $i < n$, τότε $i = i + 1$ και πήγαινε στο βήμα 4. Διαφορετικά πήγαινε στο βήμα 9.
9. Επιστρέφουμε το δέντρο.



T_1
$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$
T_2
$\{A_2, \ldots, A_n\}$
ΨA_2
T_3
$\{A_3, \ldots, A_n\}$
ΨA_3
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
T_n
A_n
ΨA_n
F

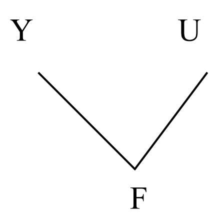
και τερματίζομε

10. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο $S-\{C\}$.

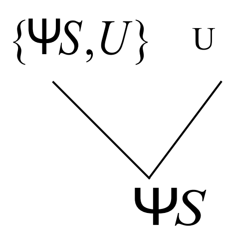
Παράδειγμα Ελέξτε αν το σύνολο
$S=\{\{P,Q,R\},\{\Psi P,S,T\},\{\Psi S,U\},\Psi T,\{\Psi P,\Psi U\},\{\Psi Q,W\},\{\Psi Q,\Psi W\},\Psi R\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

(1) Δεν υπάρχουν αντίθετα γράμματα στο S.
(2) Υπάρχουν όροι που περιέχουν μόνο θετικά γράμματα.
(3) $C=\{P,Q,R\}, i=1$
(4) ΨP Ο S
(5) $S_{1=}\{\{S,T\},\{\Psi S,U\},\Psi T,\Psi U,\{\Psi Q,W\},\{\Psi Q,\Psi W\},\Psi R\}$
(6) Αναδρομική κλήση του αλγορίθμου με είσοδο S_1

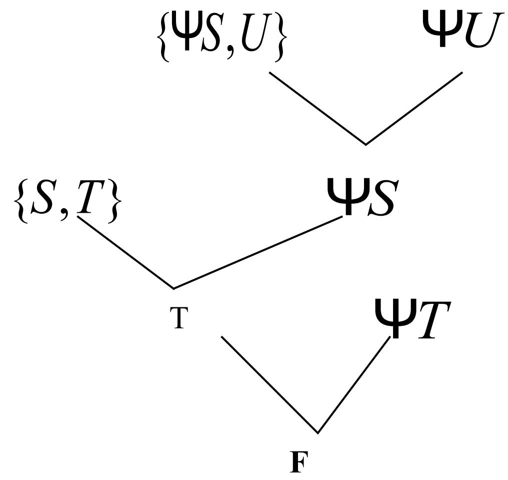
(1')-
(2')-
(3') CΆ$=\{S,T\}, i$Ά$=1$
(4') ΨS Ο S_1
(5') $S_{11}=\{U,\Psi T,\Psi U,\{\Psi Q,W\},\{\Psi Q,\Psi W\},\Psi R\}$
(6') Αναδρομική κλήση του αλγορίθμου με είσοδο S_{11}
(1'') S_{11} περιέχει U και ΨU. Επιστρέφουμε το δέντρο



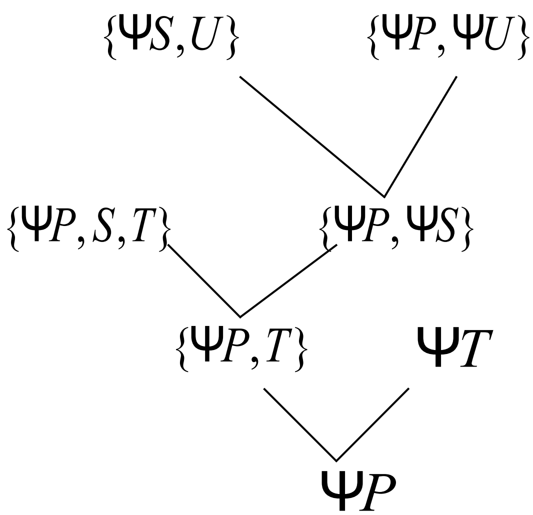
(7') Αντικαθσιστούμε τον κόμβο U με τον αντίστοιχο όρο του. Προκύπτει το δέντρο T_{11}



(8') iΆ$=2$
(4') ΨT Ξ $S_{1,}T_{12}$:ΨT
(8') iΆ$=2$
(9') Επιστρέφουμε το δέντρο



(7)Το δέντρο αναμορφώνεται στο T_1



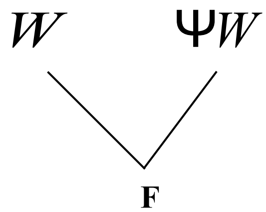
(8) i = 2

(4) $\Psi Q \circ S$

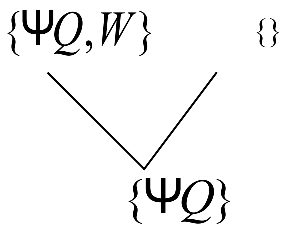
(5) $S_2 = \{\{\Psi P, S, T\}, \{\Psi S, U\}, \Psi T, \{\Psi P, \Psi U\}, W, \Psi W, \Psi R\}$

(6) Αναδρομική κλήση του αλγορίθμου με είσοδο S_2

(1’) Το S_2 περιέχει και W και ΨW . Επιστρέφουμε το δέντρο



(7) Το δέντρο αναμορφώνεται στο T_2

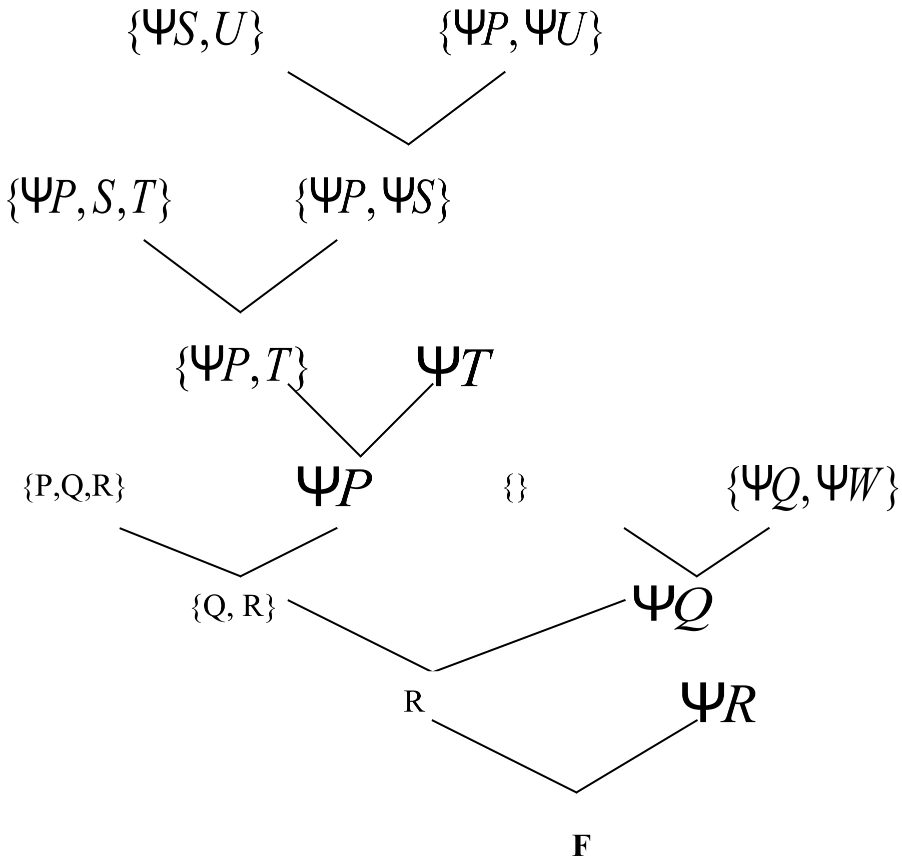


(8) i = 3

(4) $\Psi R \Xi S$, T_3 :ΨR

(8) i = 3

(9) Επιστρέφουμε το δέντρο



4.5.1 Πληρότητα

Για να αποδείξουμε ότι η μέθοδος της επίλυσης είναι πλήρης μέθοδος, χρειαζόμαστε τα ακόλουθα :

Λήμμα 1: Αν κάθε μέλος ενός συνόλου όρων περιέχει ένα αρνητικό γράμμα, τότε το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

Απόδειξη: Θεωρείστε την ερμηνεία I που απεικονίζει την τιμή ψ σε κάθε γράμμα. Έστω C ένας όρος του συνόλου. Τότε, $|=_I$ C γιατί το C περιέχει ένα αρνητικό γράμμα. Άρα το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

Για παράδειγμα, θεωρείστε το σύνολο, $S = \{\{\Psi P, Q\}, \{\Psi Q, R, S\}, \{\Psi R, S, T\}, \{\Psi S, T\}\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο: π.χ., για την ερμηνεία που απεικονίζει ψ σε όλα τα γράμματα.

Λήμμα 2: Έστω ένα σύνολο όρων S και L κάποιο γράμμα για το οποίο: (α) S |= L και (β) $L \bigcirc S$. Τότε, το σύνολο $S' = \{C - \{L\} \mid C \,\Xi\, S\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο. (Δικαιολογεί το βήμα (7) του αλγορίθμου).

Απόδειξη: Έστω ότι το S' είναι ικανοποιήσιμο και I' ερμηνεία που το ικανοποιεί. Αν η I' κάνει το L ψευδές , τότε $I := I'$. Διαφορετικά, έστω I η ερμηνεία η οποία διαφέρει από την I' μόνο στο ότι $|\text{H}_I\, L$. Ο μόνος τρόπος για να είναι ένας όρος αληθής στην I' αλλά ψευδής στην *I* είναι με το να περιέχει το γράμμα *L*. Επομένως, αφού κανένας όρος του S' δεν περιέχει το L και η I' ικανοποιεί το S', η I ικανοποιεί το S' επίσης. Η I πρέπει να ικανοποιεί το S γιατί με την προσθήκη του L ένας αληθής όρος δεν μπορεί να γίνει ψευδής. Άρα υπάρχει ερμηνεία για την οποία $\models_I S$ και $\not\models_I L$, και επομένως $S \not\models L$. Αφού όμως $S \models L$, το S' πρέπει να είναι μη-ικανοποιήσιμο.

Με τη χρήση των παραπάνω λημμάτων μπορούμε να δείξουμε ότι ο αλγόριθμος είναι σωστός. Άρα, κάθε μη-ικανοποιήσιμο σύνολο όρων έχει ένα δένδρο ανασκευής. Το συμπέρασμα είναι ότι η μέθοδος της επίλυσης είναι πλήρης.