ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

4ο μέρος σημειώσεων: Ακολουθίες Επίλυσης, Επίλυση για όρους Horn, Λογικός Προγραμματισμός

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

1. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

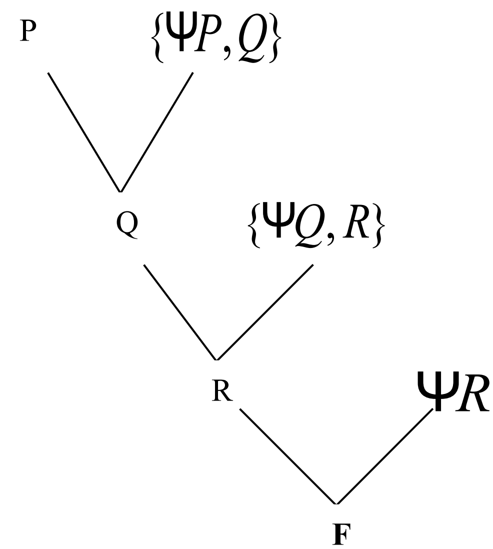
2. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

3. Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

4.5.2 Ακολουθίες Επίλυσης

Μερικά δένδρα επίλυσης έχουν απλή δομή. Για παράδειγμα, για το σύνολο όρων $S = \{P, \{\Psi P, Q\}, \{\Psi Q, R\}, \Psi R\}$ το δένδρο ανασκευής έχει τη μορφή :



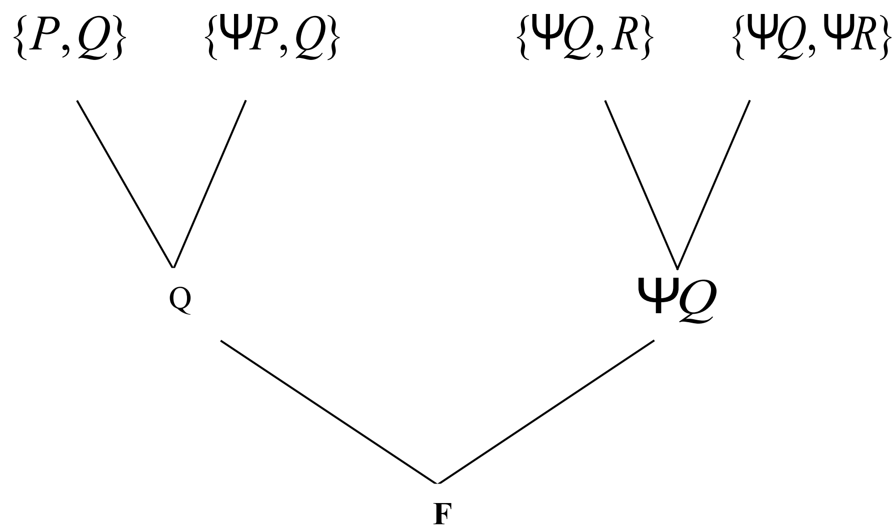
Αυτό το δένδρο έχει την ιδιότητα ότι κάθε επίλυση γίνεται μεταξύ ενός όρου του S και ενός άλλου όρου (ο οποίος μπορεί επίσης να ανήκει στο S). Με άλλα λόγια, ποτέ δεν επιλύονται δύο όροι οι οποίοι προκύπτουν από προηγούμενες επιλύσεις. Δένδρα επίλυσης με αυτή την ιδιότητα μπορούν να αναπαρασταθούν σε γραμμική μορφή και λέγονται <u>ακολουθίες επίλυσης</u>.

Η ακολουθία επίλυσης του προηγούμενου παραδείγματος είναι η $P \xrightarrow{\{\Psi P, Q\}} Q \xrightarrow{\{\Psi Q, R\}} R \xrightarrow{\Psi R} \boldsymbol{F}$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω S ένα σύνολο όρων. Μια ακολουθία επίλυσης του S είναι μια πεπερασμένη ακολουθία όρων $C_0, C_1, ..., C_n$ για την οποία (α) $C_0 \,\Xi\, S$ και (β) για $i = 1, 2, ..., n, C_i$ είναι ο όρος επίλυσης του C_{i-1} με κάποιο μέλος του S. Αν $C_n = \mathbf{F}$ τότε η $C_0, C_1, ..., C_n$ καλείται <u>ακολουθία ανασκευής</u>.

Είναι εύκολο να δούμε ότι, αν υπάρχει μια ακολουθία ανασκευής για ένα σύνολο S, τότε το S είναι μη-ικανοποιήσιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει: δεν είναι απαραίτητο κάθε μη-ικανοποιήσιμο σύνολο να έχει μια ακολουθία ανασκευής.

<u>Παράδειγμα:</u> Το σύνολο $S = \{\{P, Q\}, \{\Psi P, Q\}, \{\Psi Q, R\}, \{\Psi Q, \Psi R\}\}$ έχει το παρακάτω δένδρο ανασκευής:



Το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο αλλά δεν έχει ακολουθία ανασκευής.

<u>Λήμμα 3</u>: Αν ένα σύνολο όρων S έχει μια ακολουθία ανασκευής, τότε το S περιέχει ένα μοναδιαίο όρο.

<u>Απόδειξη</u>: Κάθε ακολουθία ανασκευής τερματίζει με μια επίλυση της μορφής res($A, \Psi A$) $= F$ για κάποιο A. Εξ' ορισμού το A ή το ΨA πρέπει να ανήκει στο S.

Οι ακολουθίες ανασκευής είναι πιο αποδοτικές από τα δένδρα ανασκευής. Επομένως, μπορούμε να επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε κάποιο υποσύνολο όρων για το οποίο η ύπαρξη ή μη-ύπαρξη μιας ακολουθίας ανασκευής είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την (μη-)ικανοποιησιμότητα ενός συνόλου τέτοιων όρων.

<u>Ορισμός</u>: Ένας όρος Horn είναι ένας όρος ο οποίος περιέχει το πολύ ένα θετικό γράμμα.

<u>Παράδειγμα</u>: Οι όροι $T, F, P, \Psi P, \{\Psi P, Q\}, \{\Psi P, Q, \Psi R\}$ είναι όροι Horn, αλλά οι $\{P, Q\}, \{P, Q, \Psi R\}, \{\Psi P, Q, R, \Psi S\}$ δεν είναι.

<u>Λήμμα 4</u>: Ο όρος επίλυσης δύο όρων Horn είναι όρος Horn.

<u>Απόδειξη</u>: Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός των θετικών γραμμάτων δύο όρων C και C' είναι n και n' αντίστοιχα. Αν υπάρχει res(S, S'), τότε ο όρος αυτός προκύπτει από τη διαγραφή ενός θετικού γράμματος από τον ένα όρο και ενός αρνητικού γράμματος από τον άλλο. Επομένως, ο αριθμός των θετικών γραμμάτων στον res(C, C') είναι $n + n'$-1. Αν οι C και C' είναι όροι Horn τότε $n \leq 1$ και $n' \leq 1$. Άρα $n + n'$-1 ≤ 1 επομένως ο res(C, C') είναι όρος Horn.

<u>Πόρισμα</u>: Αν ένα σύνολο όρων Horn είναι μη-ικανοποιήσιμο, τότε είτε πρέπει να περιέχει το **F**, είτε ένα θετικό μοναδιαίο όρο.

<u>Απόδειξη</u>: Από το Λήμμα 3, αν ένα σύνολο όρων Horn είναι μη-ικανοποιήσιμο, πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα μοναδιαίο όρο χωρίς αρνητικά γράμματα. Οι μόνοι όροι Horn χωρίς αρνητικά γράμματα είναι οι όροι **F** και A για κάποιο γράμμα A.

4.5.3 Μέθοδος της Επίλυσης για όρους Horn

Ο αλγόριθμος καταασκευής δένδρου ανασκευής εφαρμόζεται και σε όρους Horn. Σε αυτήν την περίπτωση το αποτέλεσμα είναι πάντα μια ακολουθία ανασκευής.

<u>Παράδειγμα</u>: Κατασκευάστε μια ακολουθία ανασκευής για το σύνολο S $= \{P, \{\neg P, Q\}, \{\neg Q, \neg R\}, \{\neg P, R\}\}$.

(1) Δεν υπάρχει όρος που να περιέχει A και $\neg A$ για κάποιο A

(2) Υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος που περιέχει μόνο θετικά γράμματα

(3) $C = P, i = 1$

(4) $\neg P \in S$

(5) $S_1 = \{Q, \{\neg Q, \neg R\}, R\}$

(6) αναδρομική κλήση του αλγορίθμου με είσοδο S_1

1. δεν υπάρχει όρος που να περιέχει A και $\neg A$ για κάποιο A
2. υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος που περιέχει μόνο θετικά γράμματα
3. $C = Q, i = 1$
4. $\neg Q \in S_1$
5. $S_{11} = \{\neg R, R\}$
6. αναδρομική κλήση του αλγορίθμου με είσοδο S_{11}
    - i. Το S_{11} περιέχει R και $\neg R$, οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει επιστρέφοντας την ακολουθία : $\neg R \xrightarrow{R} F$.
7. Αναμορφώνουμε την ακολουθία $\{\neg Q, \neg R\} \xrightarrow{R} \neg Q$
8. $i = n - 1$
9. Επιστρέφουμε την ακολουθία $\{\neg Q, \neg R\} \xrightarrow{R} \neg Q \xrightarrow{Q} F$

(7) Αναμορφώνουμε την ακολουθία $\{\neg Q, \neg R\} \xrightarrow{\{\neg P, R\}} \{\neg P, \neg Q\} \xrightarrow{\{\neg P, Q\}} \neg P$

(8) $i = n - 1$

(9) Επιστρέφουμε την ακολουθία
$\{\neg Q, \neg R\} \xrightarrow{\{\neg P, R\}} \{\neg P, \neg Q\} \xrightarrow{\{\neg P, Q\}} \neg P \xrightarrow{P} \mathbf{F}$ και ο αλγόριθμος τερματίζει.

Η ακολουθία αυτή δεν είναι μοναδική. Υπάρχουν και άλλες για το ίδιο σύνολο *S*. Για παράδειγμα οι ακολουθίες :

$\{\neg P, R\} \xrightarrow{\{\neg Q, \neg R\}} \{\neg P, \neg Q\} \xrightarrow{\{\neg P, Q\}} \neg P \xrightarrow{P} F$

$\{\neg P, Q\} \xrightarrow{\{\neg Q, \neg R\}} \{\neg P, \neg R\} \xrightarrow{\{\neg P, R\}} \neg P \xrightarrow{P} F$

$P \xrightarrow{\{\neg P, R\}} R \xrightarrow{\{\neg Q, \neg R\}} \neg Q \xrightarrow{\{\neg P, Q\}} \neg P \xrightarrow{P} F$

Υπάρχουν συνολικά 12 ακολουθίες ανασκευής για το σύνολο *S*. Όλες οι ακολουθίες μπορούν να αναπασταθούν σε ένα γράφο ο οποίος ονομάζεται <u>δίκτυο ανασκευής</u>. Γενικά, αν ένα σύνολο όρων Horn είναι ικανοποιήσιμο, τότε το δίκτυο ανασκευής δεν περιέχει το **F**. Για παράδειγμα, το δίκτυο ανασκευής του συνόλου

$S = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg P, S\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg S, R\}, P\}$ δεν περιέχει το **F** (κατασκευάστε το). Το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο: η ερμηνεία $I = \{P, Q, R, S\}$ είναι μοντέλο του *S*.

Διαδικασία ελέγχου ικανοποιησιμότητας ενός συνόλου όρων Horn

> Κατασκευάζουμε συστηματικά το δίκτυο ανασκευής και σταματάμε όταν προκύψει ο όρος **F,** οπότε το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο, ή όταν το δίκτυο είναι πλήρες (αν δεν περιέχει το **F** τότε είναι ικανοποιήσιμο).

Η διαδικασία είναι μη-αποδοτική. Ευτυχώς, δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε όλες τις δυνατές ακολουθίες ανασκευής, όπως αποδεικνύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα: Αν S είναι ένα μη-ικανοποιήσιμο σύνολο όρων Horn και C κάποιο μέλος του S, τότε, είτε το $S - \{C\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο είτε υπάρχει ακολουθία ανασκευής για το *S* η οποία ξεκινά με το C.

Το θεώρημα αυτό μας είναι χρήσιμο αν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την επιλογή ενός όρου C από το *S* για το οποίο το $S - \{C\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο. Υποθέστε ότι μας δίνεται ένα σύνολο όρων W το οποίο είναι ικανοποιήσιμο και θέλουμε να διαπιστώσουμε αν $W \models A$ για κάποιο $A \in W$. Αυτό θα συμβαίνει αν το σύνολο $W' = W \cup \{\neg A\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο. Εφόσον το $W' - \{\neg A\} = W$ είναι ικανοποιήσιμο, το θεώρημα λέει ότι το W' θα είναι μη-ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία ανασκευής που ξεκινά με το $\neg A$. Άρα πρέπει να αναζητούμε συστηματικά μια ακολουθία ανασκευής αυτού του είδους.

Παράδειγμα: Δεδομένου ότι το σύνολο $W = \{\{Q, \neg S\}, P, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q, R\}\}$ είναι ικανοποιήσιμο, αποφασίστε αν $W \models R$

$$\neg R \xrightarrow{\{\neg P, \neg Q, R\}} \{\neg P, \neg Q\} \xrightarrow{\{\neg P, Q\}} \neg P \xrightarrow{P} F$$

Άρα, το $W \cup \{\neg R\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο, οπότε $W \models R$.

Παράδειγμα: Δεδομένου ότι το σύνολο
$W = \{\{\neg P, \neg R, S\}, \{\neg P, \neg Q, T\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg S, U\}, \{\neg T, U\}\}$ είναι ικανοποιήσιμο, αποφασίστε αν $W \models U$.

Οι παρακάτω ακολουθίες ξεκινούν με $\neg U$:

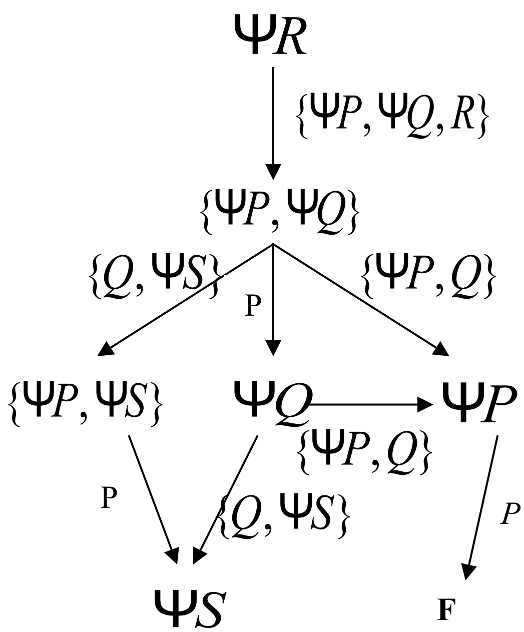
$$\neg U \xrightarrow{\{\neg S, U\}} \neg S \xrightarrow{\{\neg P, \neg R, S\}} \{\neg P, \neg R\} \xrightarrow{\{\neg Q, R\}} \{\neg P, \neg Q\}$$

$$\neg U \xrightarrow{\{\neg T, U\}} \neg T \xrightarrow{\{\neg P, \neg Q, T\}} \{\neg P, \neg Q\}$$

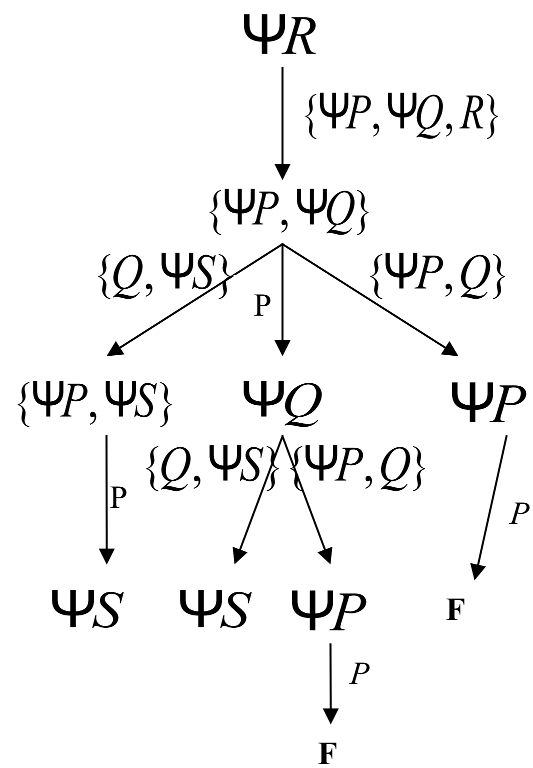
Δεν υπάρχει ακολουθία ανασκευής η οποία ξεκινά με το. $\neg U$. Άρα $W \not\models U$

Χρειαζόμαστε μια μέθοδο για να παράγουμε δίκτυα ανασκευής συστηματικά. Είναι ευκολότερο να βρεθεί μια τέτοια μέθοδος αν το δίκτυο γίνει δένδρο. Αυτό γίνεται με την αντικατάσταστη ακμών που συγκλίνουν με παράλληλες ακμές.

Παράδειγμα: Το δίκτυο ανασκευής



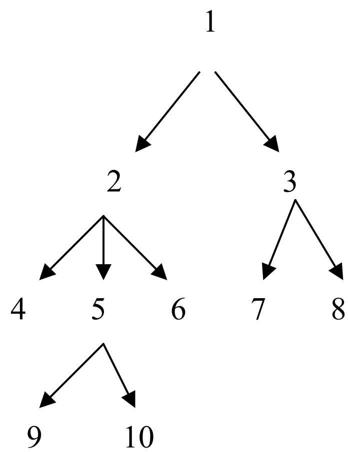
μετασχηματίζεται στο δένδρο



Χρησιμοποιούμε την εξής σύμβαση: αν δύο ή περισσότερα κλαδιά ξεκινούν από τον ίδιο κόμβο τότε γράφονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με τη σειρά που οι ετικέτες τους εμφανίζονται στο αρχικό σύνολο.

Αναζήτηση στο δένδρο: Ξεκινώντας από τη ρίζα του δένδρου ακολουθούμε πάντα το αριστερό κλαδί. Όταν συναντήσουμε ένα φύλλο, επιστρέφουμε στην προηγούμενη διακλάδωση και εξερευνούμε το αριστερότερο ανεξερεύνητο κλαδί. Αυτή η μέθοδος αναζήτησης λέγεται διάσχιση προδιάταξης (pre-order traversal).

<u>Παράδειγμα</u>: Στο ακόλουθο δένδρο



θα επισκεφτούμε τους κόμβους με την εξής σειρά: 1,2,4,5,9,10,6,3,7,8.

Σε σχέση με μια μέθοδο αναζήτησης, η σειρά με την οποία μας δίνονται οι όροι έχει σημασία στο πόσο γρήγορα θα βρεθεί ο όρος **F** (αν υπάρχει).

Παράδειγμα: Για το σύνολο $P = \{\{\Psi P, Q\}, \{\Psi Q, P\}, P\}$ η διάταξη προδιάταξης δεν τερματίζεται.

4.6 Λογικός Προγραμματισμός

Η μέθοδος της επίλυσης για όρους Horn βρίσκει εφαρμογή στον Λογικό Προγραμματισμό. Οι όροι Horn μεταφράζονται σε δεδομένα (facts), κανόνες (rules) και ερωτήσεις (queries).

Θετικοί μοναδιαίοι όροι (π.χ., P,Q) μεταφράζονται σε δεδομένα. Ένας όρος με ένα θετικό γράμμα και ένα ή περισσότερα αρνητικά γράμματα μεταφράζεται σε έναν κανόνα. Ο όρος $\{\Psi A_1, \Psi A_2, ..., \Psi A_{n,} A\}$ αναπαριστά την πρόταση ΨA_1 Ï ΨA_2 Ï .. ..Ï ΨA_n Ï A η οποία είναι ισοδύναμη με την πρόταση $A_1 \,\Omega\, A_2 \,\Omega ... \Omega\, A_n \rightarrow A$. Στο λογικό προγραμματισμό συνηθίζεται οι κανόνες να γράφονται στη μορφή $A \leftarrow A_1, A_2, ..., A_n$, με την ερμηνεία «το Α είναι αληθές αν τα $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι αληθή».

Η επίλυση εφαρμόζεται στο λογικό προγραμματισμό ως εξής: οι κανόνες $A \leftarrow A_1, A_2, ..., A_n$ και $A_m \leftarrow B_1, B_2, ..., B_k$ όπου $A_m \,\Xi\, \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ επιλύονται δίνοντας τον κανόνα $A \leftarrow A_1, A_2, ..., A_{m-1,} B_1, B_2, ..., B_{k,} A_{m+1}, ..., A_n$

Παράδειγμα: Θεωρείστε τις εξής προτάσεις

1. «αν βρέξει, ο αγώνας θα αναβληθεί»
2. «αν ο αγώνας θα αναβληθεί, θα πάμε στο πάρτυ»
3. «αν πάμε στο πάρτυ και βρέχει, θα πάρουμε το λεωφορείο»
4. «αν πάρουμε το λεωφορείο, θα χρειαστούμε χρήματα»
5. «θα βρέξει»

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι «θα χρειαστούμε χρήματα».

Πρέπει να γράψουμε τις προτάσεις σε μορφή όρων Horn και στη μορφή που χρησιμοποιούνται στο Λογικό Προγραμματισμό. Ορίζουμε τα παρακάτω προτασιακά γράμματα:

- **P**: «θα βρέξει»
- **Q**: «ο αγώνας θα αναβληθεί»
- **R**: «θα πάμε στο πάρτυ»
- **S**: «θα πάρουμε το λεωφορείο»
- **V**: «θα χρειστούμε χρήματα»

Τότε, οι προτάσεις (1)-(5) γράφονται ως εξής:

1. $Q \leftarrow P$
2. $R \leftarrow Q$
3. $S \leftarrow Q, P$
4. $V \leftarrow S$
5. P

ή σε μορφή όρων Horn: $\{\{\Psi P, Q\}, \{\Psi Q, R\}, \{\Psi Q, \Psi P, S\}, \{\Psi S, V\}, P\}$.
Η ερώτηση «θα χρειαστούμε χρήματα;" μεταφράζεται σαν ΨV. Για να διαπιστώσουμε αν είναι λογική συνέπεια των προτάσεων (1)-(5), πρέπει να βρούμε μια ακολουθία ανασκευής ξεκινώντας από το ΨV. Η ακολουθία $\Psi V \xrightarrow{\{\Psi S, V\}} \Psi S \xrightarrow{\{\Psi Q, \Psi P, S\}} \{\Psi Q, \Psi P\} \xrightarrow{\{\Psi P, Q\}} \Psi P \xrightarrow{P} \mathbf{F}$, δείχνει ότι το V είναι λογική συνέπεια των (1)-(5).

Δυστυχώς, ο περιορισμός σε όρους Horn δεν μας επιτρέπει να εκφράσουμε κανόνες της μορφής «αν πάμε στο πάρτυ και δεν βρέχει, θα περπατήσουμε». Αν το γράμμα U δηλώνει την πρόταση «θα περπατήσουμε», τότε η πρόταση αυτή θα είναι ισοδύναμη με την $R \,\Omega\, \Psi P \rightarrow U$, δηλαδή με τον όρο $\{\Psi R, P, U\}$ ο οποίος δεν είναι όρος Horn. Αν περιλάβομε όρους που δεν είναι Horn τότε δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι κάθε μη-ικανοποιήσιμο σύνολο έχει μια ακολουθία ανασκευής.

Στη γλώσσα Prolog, οι παραπάνω προτάσεις μπορούν να εκφραστούν στη μορφή ενός λογικού προγράμματος:

```
q:-p.
r:-q.
s:-q,r.
v:-s.
p.
```

Αφού φορτωθεί το πρόγραμμα interpreter της Prolog, η ερώτηση ?-v επιστρέφει "yes".