ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

5ο μέρος σημειώσεων: Κατηγορηματικός Λογισμός (Predicate Calculus)

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης **Creative Commons** και ειδικότερα

Αναφορά – Μη εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 3.0 Ελλάδα
(Attribution – Non Commercial – ShareAlike 3. Greece)

CC BY-NC-SA 3.0 GR

- Εξαιρείται από την ως άνω άδεια υλικό που περιλαμβάνεται στις διαφάνειες του μαθήματος, και υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης. Η άδεια χρήσης στην οποία υπόκειται το υλικό αυτό αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

5. Κατηγορηματικός Λογισμός (Predicate Calculus)

5.1 Αντικείμενα, Ιδιότητες και Σχέσεις

Θεωρείστε την παρακάτω εξαγωγή συμπεράσματος:

Κανένας ακέραιος δεν είναι μεγαλύτερος από το τετράγωνό του
Το $\frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνό του

Το $\frac{1}{2}$ δεν είναι ακέραιος.

Μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

Κανένα A δεν είναι B.
Το c είναι B.

Το c δεν είναι A.

Η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη γιατί αν το συμπέρασμα ήταν ψευδές αλλά οι υποθέσεις αληθείς, τότε το c θα ήταν και A και B. Τι κάνει όμως την εξαγωγή συμπεράσματος έγκυρη; Αν η λέξη «κανένα» αντικαθιστόταν από τη λέξη «κάθε» ή «μερικά», τότε δεν θα ήταν έγκυρη.

Στον προτασιακό λογισμό δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε προτάσεις της μορφής «κανένα A δεν είναι B». Είναι μια αρνητική πρόταση, αλλά δεν είναι η άρνηση της πρότασης «όλα τα A είναι B». Η άρνηση αυτής θα ήταν «μερικοί ακέραιοι είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους». Άρα θα πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα να αναπαριστούμε προτάσεις αυτής της μορφής επίσης.

Οι φράσεις «ακέραιος» και «μεγαλύτερος από το τετράγωνό του» δηλώνουν ιδιότητες τις οποίες κάποια αντικείμενα μπορούν να έχουν. Η πρόταση «κανένα A δεν είναι B» μας λέει ότι κανένα αντικείμενο δεν μπορεί να έχει τις δύο ιδιότητες συγχρόνως, ή, διαφορετικά, ότι η κλάση των ακεραίων με την κλάση των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους δεν έχουν κοινά στοιχεία. Τα γράμματα A και B δηλώνουν λοιπόν ιδιότητες. Το γράμμα c είναι διαφορετικό. Το $\frac{1}{2}$ δεν δηλώνει μια ιδιότητα αλλά ένα συγκεκριμένο αντικείμενο. Αντικείμενα μπορεί να έχουν ιδιότητες. Π.χ., το $\frac{1}{2}$ έχει την ιδιότητα ότι είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνό του, αλλά δεν έχει την ιδιότητα του ακέραιου.

Θεωρείστε τώρα την εξαγωγή συμπεράσματος

Ο Αριστοτέλης είναι φιλόσοφος
Ο Σοφοκλής είναι ποιητής
Ο Αριστοτέλης μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή

Κάποιος φιλόσοφος μένει στην ίδια πόλη με κάποιον ποιητή

η οποία μπορεί να γραφεί και ως

α είναι P
β είναι Q
α είναι R με β

κάποιο P είναι R με κάποιο Q

Τα α,β είναι αντικείμενα ενώ τα P,Q είναι ιδιότητες. Το R δεν είναι ιδιότητα. Εκφράζει μια σχέση μεταξύ αντικειμένων. Μπορούμε να έχουμε και τριαδικές ή n-αδικές σχέσεις. Π.χ., μκδ(α,β,γ): το γ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β.

Χρειαζόμαστε λοιπόν μηχανισμούς αναπαράστασης και λογισμού για αντικείμενα, ιδιότητες και σχέσεις. Αυτό είναι και το αντικείμενο του Κατηγορηματικού Λογισμού.

5.2 Ονόματα και Κατηγορήματα

Τα ονόματα παίζουν το ρόλο περιγραφικών εκφράσεων που υποδεικνύουν κάποιο αντικείμενο. Στον κατηγορηματικό λογισμό χρησιμοποιούμε μικρά γράμματα (a,b,c,d κλπ) ως ονόματα και τα οποία καλούνται σταθερές αντικειμένων ή απλά σταθερές αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης. Για την απόδοση ιδιότητων σε αντικείμενα σε χρησιμοποιούμε σύμβολα κατηγορημάτων (για τις ιδιότητες) και ορίσματα (για τα αντικείμενα). Για παράδειγμα, για να αποδώσουμε την ιδιότητα *F* στο αντικείμενο *α*, γράφομε *F(α)*. Με παρόμοιο τρόπο αναπαριστώνται και οι σχέσεις : χρησιμοποιούμε κατηγορήματα με περισσότερα του ενός ορίσματα. Για παράδειγμα, *Q(a,b)* αναπαριστά τη σχέση Q μεταξύ των a,b.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω τα κατηγορήματα *E*(_): _είναι άρτιος, *P*(_): _είναι πρώτος, *M*(_,_) ο _ είναι πολλαπλάσιο του _, *G*(_,_): ο _ είναι μεγαλύτερος του _. Αν οι σταθερές a,b,c,d συμβολίζουν τους ακέραιους 1,2,3,4 αντίστοιχα, τότε *E(b)* σημαίνει «ο 2 είναι άρτιος», P(c) σημαίνει «ο 3 είναι πρώτος», $\Psi M(b,c)$ σημαίνει «ο 2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3», $M(f,b)$ Ï $P(f)$ σημαίνει «το 6 είναι πολλαπλάσιο του 2 ή το 6 είναι πρώτος», $M(h,b) \rightarrow P(h)$ Ï $G(h,b)$ σημαίνει «αν το 8 είναι πολλαπλάσιο του 2, τότε το 8 είναι πρώτος ή το 8 είναι μεγαλύτερο του 2» και $P(d) \leftrightarrow E(e)$ σημαίνει «το 4 είναι πρώτος αν και μόνο αν το 5 είναι άρτιος».

5.3 Ποσοδείκτες

Θεωρείστε ξανά την εξαγωγή συμπεράσματος

ο Αριστοτέλης είναι φιλόσοφος
ο Σοφοκλής είναι ποιητής
ο αριστοτέλης μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή

κάποιος φιλόσοφος μένει στην ίδια πόλη με κάποιον ποιητή

Οι υποθέσεις μπορούν να αναπαρασταθούν ως $P(a), Q(b), R(a,b)$. Πως μπορεί όμως να εκφραστεί το συμπέρασμα;

Το συμπέρασμα μπορεί να γραφεί ως : για κάποιο x, ο x είναι φιλόσοφος και για κάποιο *y*, ο *y* είναι ποιητής και ο x μένει στην ίδια πόλη με τον y. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\exists$ για να εκφράσουμε τη φράση «για κάποιο». Το «για κάποιο» διαβάζεται και ως «υπάρχει κάποιο». Το συμπέρασμα γράφεται ως $\exists x(P(x)\,\Omega\,\exists y(Q(y)\,\Omega\,R(x,y)))$. Οι μεταβλητές *x,y* ονομάζονται δεσμευμένες μεταβλητές γιατί η ύπαρξή τους στην πρόταση δεσμεύεται από τους ποσοδείκτες.

<u>Παραδείγματα:</u>

- Υπάρχει ένας ποιητής - $\exists x Q(x)$
- Κάποιος ποιητής είναι φιλόσοφος - $\exists x(Q(x)\,\Omega\,P(x))$
- Κάποιος φιλόσοφος είναι ποιητής - $\exists x(P(x)\,\Omega\,Q(x))$
- Κάποιος μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή - $\exists x R(x,b)$
- Ο Σοφοκλής μένει στην ίδια πόλη με κάποιον - $\exists x R(b,x)$
- Ο Σοφοκλής μένει στην ίδια πόλη με κάποιον φιλόσοφο - $\exists x(P(x)\,\Omega\,R(b,x))$
- Ο Σοφοκλής δεν μένει στην ίδια πόλη με κάποιον φιλόσοφο - $\Psi\exists x(P(x)\,\Omega\,R(b,x))$
- Κανένας φιλόσοφος δεν μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή - $\Psi\exists x(P(x)\,\Omega\,R(x,b))$

<u>Παράδειγμα</u>:

Κανένας ακέραιος δεν είναι μεγαλύτερος από το τετράγωνό του
Το $\frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνό του

Το $\frac{1}{2}$ δεν είναι ακέραιος
μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$\Psi\exists x(I(x)\,\Omega\,G(x))$
$G(a)$

$\Psi I(a)$

όπου I αναπαριστά την ιδιότητα «ακέραιος», G την ιδιότητα «μεγαλύτερος από το τετράγωνό του» και a το $\frac{1}{2}$. Αν αντί του G χρησιμοποιηθεί το κατηγόρημα H(_,_) που αναπαριστά τη σχέση «μεγαλύτερος από το τετράγωνό του», τότε η παραπάνω εξαγωγή συμπεράσματος γράφεται ως

$\Psi\exists x(I(x)\,\Omega H(x,x))$
$H(a,a)$

$\Psi I(a)$

Έχουμε ήδη εισάγει τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $(\exists)$. Η ύπαρξη ενός ποσοδείκτη σε μια πρόταση δεσμεύει την μεταβλητή που ο ποσοδείκτης εισάγει. Για παράδειγμα, η μεταβλητή x στην πρόταση $\exists x(Q(x)\Omega R(a,x))$ είναι δεσμευμένη από το $\exists$. Η πρόταση αυτή είναι ισοδύναμη με τις προτάσεις $\exists y(Q(y)\Omega R(a,y))$ και $\exists z(Q(z)\Omega R(a,z))$. Το σύμβολο που χρησιμοποιείται για τη μεταβλητή δεν έχει σημασία εφόσον χρησιμοποιείται σε όλα τα μέρη που εμφανίζεται η δεσμευμένη μεταβλητή. Επομένως, η παραπάνω πρόταση δεν είναι ισοδύναμη με την πρόταση $\exists y(Q(y)\Omega R(a,z))$. Σε περίπτωση που περισσότεροι από έναν ποσοδείκτες είναι απαραίτητοι, διαφορετικές μεταβλητές πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Για παράδειγμα, $\exists x(P(x)\,\Omega\exists y(Q(y)\Omega R(x,y)))$ ή $\exists z(P(z)\,\Omega\exists y(Q(y)\Omega R(z,y)))$ αλλά όχι $\exists x(P(x)\,\Omega\exists x(Q(x)\Omega R(x,x)))$.

Το πεδίο ενός ποσοδείκτη είναι το (σύνθετο) κατηγόρημα στο οποίο εφαρμόζεται. Απλά κατηγορήματα φτιάχνονται από σύμβολα κατηγορημάτων, π.χ., *P,Q*. Σύνθετα κατηγορήματα προκύπτουν από τα απλά με χρήση συνδετικών και ποσοδεικτών. Π.χ., $P(a)\,\Omega\exists y(Q(y)\Omega R(a,y))$ είναι σύνθετο κατηγόρημα. Στην πρόταση $\exists x(P(x)\,\Omega\exists y(Q(y)\Omega R(x,y)))$ το πεδίο του $\exists x$ είναι $(P(x)\,\Omega\exists y(Q(y)\Omega R(x,y)))$ ενώ το πεδίο του $\exists y$ είναι $(Q(y)\Omega R(x,y))$.

Ο καθολικός ποσοδείκτης συμβολίζεται με το σύμβολο $\forall$. Χρησιμοποιείται για την έκφραση προτάσεων που αποδίδουν μια ιδιότητα σε όλα τα μέλη ενός συνόλου. Π.χ., «κάθε άνθρωπος είναι θνητός», «για κάθε ακέραιο υπάρχει ένας ακέραιος ο οποίος ισούται με το τετράγωνο του πρώτου». Η πρώτη από αυτές τις προτάσεις μπορεί να γραφτεί ως εξής: "για κάθε x, αν ο x είναι άνθρωπος, τότε ο x είναι θνητός». Αντιστοιχεί δηλαδή στη μορφή $\forall x(P(x)\to Q(x))$, όπου *P* σημαίνει «άνθρωπος» και *Q* σημαίνει «θνητός». Εν γένει, καθολικές δηλώσεις χρησιμοποιούν $\forall,\to$ ενώ υπαρξιακές χρησιμοποιούν $\exists,\Omega$. Η πρόταση «κάποιος άνθρωπος είναι θνητός» γράφεται ως $\exists x(P(x)\Omega Q(x))$.

Οι προτάσεις $\exists x(P(x)\Omega Q(x))$ και $\exists x(P(x)\mapsto Q(x))$ έχουν διαφορετικό νόημα από τις παραπάνω εκφράσεις. Η πρώτη μας λέει ότι «τα πάντα έχουν τις ιδιότητες *P,Q*», ενώ η δεύτερη μας λέει ότι «είτε κάτι δεν είναι άνθρωπος είτε είναι θνητός».

Όσον αφορά τη σχέση μεταξύ των δύο ποσοδεικτών, θεωρείστε την πρόταση «κανένας φιλόσοφος δεν μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή». Η πρόταση αυτή αναπαριστάται ως $\Psi\exists x(P(x)\Omega R(x,b))$. Η ίδια πρόταση μπορεί να γραφεί και ως : "για κάθε x, αν x είναι φιλόσοφος, τότε ο x δεν μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή», που αντιστοιχεί στην έκφραση $\exists x(P(x) \to \Psi R(x,b))$. Κάθε ένας από τους ποσοδείκτες μπορεί να εκφραστεί από τον άλλο ποσοδείκτη:

$\Psi\Psi\exists x(...)$ Ì $\Psi\forall x\Psi(...)$ δηλαδή $\exists x(...)$ Ì $\Psi\forall x\Psi(...)$. Παρομοίως, $\Psi\Psi\forall x(...)$ Ì $\Psi\exists x\Psi(...)$ δηλαδή $\forall x(...)$ Ì $\Psi\exists x\Psi(...)$.

Βάσει αυτών των ισοδυναμιών προκύπτει ότι:

$\Psi\exists x(P(x)\,\Omega\, R(x,b))$ Ì $\forall x\Psi(P(x)\,\Omega\, R(x,b))$ Ì $\forall x(\Psi P(x)$ Ï $\Psi R(x,b))$ Ì $\forall x(P(x) \to \Psi R(x,b))$

Οι ποσοδείκτες μπορούν να συνδυαστούν και να χρησιμοποιηθούν στην ίδια πρόταση. Για παράδειγμα,

- «κάθε φοιτητής παρακολουθεί κάποιο μάθημα» εκφράζεται ως $\forall x(S(x) \to \exists y(C(y)\,\Omega\, A(x,y)))$
- «κάποιος φοιτητής παρακολουθεί κάθε μάθημα» εκφράζεται ως $\exists x(S(x)\,\Omega\,\forall y(C(y) \to A(x,y)))$
- «κάθε μάθημα παρακολουθείται από κάποιο φοιτητή» εκφράζεται ως $\forall y(C(y) \to \exists x(S(x)\,\Omega\, A(x,y)))$
- «κάποιο μάθημα παρακολουθείται από κάθε φοιτητή» εκφράζεται ως $\exists y(C(y)\,\Omega\,\forall x(S(x) \to A(x,y)))$

5.4 Συναρτήσεις

Η χρήση συναρτήσεων μας δίνει ένα τρόπο προσδιορισμού αντικειμένων. Ο προσδιορισμός αντικειμένων με σταθερές είναι μερική περίπτωση της χρήσης συναρτήσεων. Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να εκφράσουμε την πρόταση «ο δάσκαλος του Αριστοτέλη είναι φιλόσοφος», θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια σταθερά για το «δάσκαλο του Αριστοτέλη», όπως στην έκφραση *P(a)*. Τότε η παρακάτω εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη:

Ο δάσκαλος του Αριστοτέλη είναι φιλόσοφος
Κάθε φιλόσοφος μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή

Ο δάσκαλος του Αριστοτέλη μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή

$P(a)$

ή $\forall x(P(x) \to R(x,b)$

$R(a,b)$

Θεωρείστε όμως και την ακόλουθη έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος

Ο δάσκαλος του Αριστοτέλη είναι φιλόσοφος

Ο δάσκαλος κάποιου είναι φιλόσοφος

Αυτή η εξαγωγή συμπεράσματος δεν μπορεί να εκφραστεί με το συμβολισμό του Κατηγορηματικού Λογισμού που έχουμε που έχουμε εισάγει μέχρι τώρα. Πρέπει να διατυπωθεί ως εξής: «για κάποιο x, αν ο x είναι δάσκαλος του Αριστοτέλη, τότε ο x είναι φιλόσφος», δηλαδή ως: $\exists x(F(x,a)\,\Omega\, P(x))$. Αν το F θεωρεί ως κατηγόρημα, τότε ενδέχεται να υπάρχουν περισσότεροι από έναν δάσκαλοι του Αριστοτέλη ενώ εμείς υπονοούμε ότι υπάρχει μόνο ένας. Χρειαζόμαστε μία συνάρτηση η οποία μας δίνει το μοναδικό δάσκαλο του Αριστοτέλη.

Τυπικά: αντικείμενα προσδιορίζονται από όρους. Οι όροι μπορεί να είναι απλοί ή σύνθετοι. Ένα απλός όρος είναι μια σταθερά ή μια μεταβλητή. Σύνθετοι όροι σχηματίζονται με τη χρήση συναρτησιακών συμβόλων που εφαρμόζονται σε όρους.

Ένα συναρτησιακό σύμβολο *f* και μια σταθερά *α* σχηματίζουν τον όρο *f(a)*. Οι όροι μπορούν να χρησιμοποιούνται ως ορίσματα κατηγορημάτων. Π.χ., αν η συνάρτηση *f* δίνει το δάσκαλο ενός ατόμου, τότε η έκφραση *P(f(a))* σημαίνει «ο δάσκαλος του Αριστοτέλη είναι φιλόσοφος».

Άλλα παραδείγματα :

- «Υπάρχει κάποιος φιλόσοφος» - $\exists x P(x)$
- «Ο δάσκαλος κάποιου είναι φιλόσοφος» - $\exists x P(f(x))$
- «Κανένας ακέραιος δεν είναι μεγαλύτερος από το τετράγωνό του» - $\Psi\exists x(I(x)\,\Omega\, G(x, sq(x)))$

5.5 Συντακτικό του Κατηγορηματικού Λογισμού

Ο Κατηγορηματικός Λογισμός Πρώτης Τάξης είναι ένα τυπικό σύστημα με :

1. Λεξιλόγιο:
   a. ένα σύνολο *C*, πιθανόν κενό, από σταθερές αντικειμένων *(a,b,c,d,…)*
   b. ένα σύνολο *F,* πιθανόν κενό, από συναρτησιακά σύμβολα (f,g,h,…)
   c. ένα σύνολο P, μη κενό, από σύμβολα κατηγορημάτων (F,G,P,Q,R,…)
   d. ένα σύνολο *V*, μη κενό, πιθανόν μη-πεπερασμένο από μεταβλητές (u,, v, w, x, y, …)
   e. ποσοδείκτες ($\forall, \exists$)
   f. συνδετικά ($\Psi, \Omega, \text{Ï}, \rightarrow, \leftrightarrow$)
   g. παρενθέσεις και κόμμα (,)
   Συναρτησιακά σύμβολα και σύμβολα κατηγορημάτων έχουν μια πληθικότητα (βαθμό) μεγαλύτερη του 0
2. Κανόνες Συντακτικού
   a. Ένας όρος είναι μια σταθερά ή μια μεταβλητή ή $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ όπου f είναι συναρτησιακό σύμβολο βαθμού n και $t_1, t_2, ..., t_n$ είναι όροι
   b. Αν $t_1, t_2, ..., t_n$ είναι όροι και *P* είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος βαθμού n, τότε $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ είναι ένα απλό σχήμα
   c. Αν Α και Β είναι σχήματα τότε και τα $\Psi A, A\,\Omega\, B, A\,\text{Ï}\, B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ είναι σχήματα
   d. Ένα μοναδιαίο σχήμα είναι ένα σχήμα μιας μεταβλητής (π.χ. $P(\_), Q(\_)\,\Omega\, R(a, \_)$)
   e. Αν Φ είναι ένα μοναδιαίο σχήμα και x κάποια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στο Φ, τότε $\forall x\Phi(x)$ και $\exists x\Phi(x)$ είναι σχήματα

5.6 Σημασιολογία του Κατηγορηματικού Λογισμού

Για να αποδοθεί σημασιολογία στις προτάσεις του Σημασιολογικού Λογισμού, η έννοια της ερμηνείας πρέπει να επεκταθεί. Στον Προτασιακό Λογισμό, μια ερμηνεία αποδίδει μια τιμή αλήθειας (α,ψ) σε μια πρόταση. Στην περίπτωση του Κατηγορηματικού Λογισμού, για να αποδοθεί μια τιμή αλήθειας σε μια πρόταση πρέπει να ερμηνευθούν κατάλληλα όλα τα σύμβολα της γλώσσας. Ο κατηγορηματικός λογισμός είναι μια πρωτοβάθμια γλώσσα. Για πρωτοβάθμιες γλώσσες, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός: Μια <u>ερμηνεία</u> για μια πρωτοβάθμια γλώσσα έχει δύο συστατικά:

1. Το <u>πεδίο</u> της γλώσσας, δηλαδή το σύνολο των αντικειμένων στα οποία αναφέρονται τα σύμβολα της γλώσσας
2. μια <u>συνάρτηση ερμηνείας</u> *I*, η οποία παρέχει μια αντιστοίχιση των συμβόλων της γλώσσας στο πεδίο της γλώσσας
3. Σταθερές Αντικειμένων: οι σταθερές αντικειμένων ερμηνεύονται σαν μέλη του πεδίου D. Δηλαδή για κάθε $a \in C, I(a) \in D$.
4. Συναρτησιακά σύμβολα: η ερμηνεία ενός συναρτησιακού λογισμού *f* είναι μια συνάρτηση *I(f)* με πεδίο ορισμού το D. Αν το συναρτησιακό σύμβολο δέχεται ένα όρισμα, τότε $I(f): D \to D$. Αν το συναρτησιακό σύμβολο g δέχεται $I(g): D \times D \to D$. Γενικά, αν μια συνάρτηση h είναι βαθμού n, τότε $I(h): D^n \to D$.
5. Ερμηνεία όρων της γλώσσας: για να ερμηνεύσουμε τους όρους της γλώσσας, πρέπει να επεκτείνουμε την συνάρτηση ερμηνείας σε μια συνάρτηση I', η οποία θα περιέχει την ερμηνεία των όρων και των σύνθετων εκφράσεων της γλώσσας.
    - Αν ο όρος είναι εφαρμογή μιας συνάρτησης s σε μια σταθερά α, τότε $I'(s(a)) = I(s)(I(a))$.Γενικότερα, $I'(f(t_1,...,t_n)) =$ $I(f)(I'(t_1),...,I'(t_n))$
    - Για σύμβολα κατηγορημάτων : $I(P) \subseteq D$, αν P είναι βαθμού 1, καθώς το P υποδηλώνει τα αντικείμενα στα οποία αποδίδεται η ιδιότητα P. Γενικότερα, αν ένα σύμβολο κατηγορήματος Q είναι βαθμού n, τότε $I(Q) \subseteq D^n$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έννοια της ικανοποίησης ενός απλού σχήματος δεδομένης μιας ερμηνείας: $\models_{D,I} P(a)$ αν και μόνο αν $I(a) \in I(P)$ για $a \in C$. Γενικότερα, αν t είναι όρος, $\models_{D,I} P(t)$ αν και μόνο αν $I'(t) \in I(P)$. Για κατηγορήματα μεγαλύτερου βαθμού, $\models_{D,I} Q(t_1,t_2,...,t_n)$ αν και μόνο αν $(I'(t_1), I'(t_2),...,I'(t_n)) \in I(Q)$.

Σύνθετα σχήματα προκύπτουν από τα απλά σχήματα με τη χρήση συνδετικών και ποσοδεικτών. Η έννοια της ικανοποίησης σχημάτων είναι ίδια όπως και στην περίπτωση του Προτασιακού Λογισμού για εκείνα τα σχήματα που δεν χρησιμοποιούν ποσοδείκτες. Πρέπει να οριστεί η ερμηνεία σχημάτων με ποσοδείκτες.

Θεωρείστε ότι διευρύνουμε το λεξιλόγιο της γλώσσας L με κάποια σταθερά *, και έστω L* η γλώσσα που προκύπτει. Επεκτείνουμε κάθε ερμηνεία I της L σε μια ερμηνεία της L* ως εξής: για κάθε $d \in D$, υπάρχει μια ερμηνεία I_d της L* η οποία συμπεριφέρεται όπως η I για τις απλές εκφράσεις της L και επιπλέον απεικονίζει το στοιχείο * στο d, δηλαδή $I_d(*) = d$. Τότε για κατηγορήματα βαθμού 1, $\models_{D,I_d} P(*)$ αν και μόνο αν $d \in I(P)$. Αφού το d είναι οποιοδήποτε μέλος του D, θα έχουμε ότι $I(P) = \{d \in D \mid \ \models_{D,I_d} P(*)\}$.

Στη συνέχεια, θεωρείστε σύνθετα κατηγορήματα π.χ., $Q(\_) \wedge R(a,\_)$. Χρησιμοποιώντας το στοιχείο *, μπορούμε να δημιουργήσουμε το σχήμα $Q(x) \wedge R(a,x)$. Η ερμηνεία αυτού του σχήματος είναι το σύνολο των στοιχείων d για τα οποία $Q(x) \wedge R(a,x)$ είναι αληθής σύμφωνα με την I_d . Δηλαδή $I^*(Q(\_) \wedge R(a,\_)) = \{d \in D \mid \ \models_{D,I_d} Q(*) \wedge R(a,*)\}$ και γενικότερα, για οποιοδήποτε σύνθετο κατηγόρημα Φ, $I^*(\Phi) = \{d \in D \mid \ \models_{D,I_d} \Phi(*)\}$.

Στην περίπτωση που το σχήμα περιλαμβάνει ποσοδείκτες:

1. $\models_{D,I_d} \forall x \Phi(x)$ αν και μόνο αν $I^*(\Phi) = D$
2. $\models_{D,I_d} \exists x \Phi(x)$ αν και μόνο αν $I^*(\Phi) \neq \emptyset$

Ανακεφαλαιώνοντας, μια ερμηνεία της γλώσσας L = (C,F,P,V) είναι ένα ζεύγος (D,I), όπου D είναι το πεδίο της ερμηνείας και I είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο $C \cup F \cup P$ έτσι ώστε :

1. για κάθε $c \in C, I(c) \in D$
2. για κάθε συνάρτηση f βαθμού n, $I(f): D^n \to D$
3. για κάθε κατηγόρημα *P* βαθμού *n*, $I(P) \subseteq D^n$

Βάσει της I, ορίζεται η I^* ως $I^*(f(t_1,...,t_n)) = I(f)(I^*(t_1), I^*(t_2),...,I^*(t_n))$

Ικανοποιησιμότητα:

- $\models_{D,I} P(t_1,...,t_n)$ ανν $(I^*(t_1),...,I^*(t_n)) \in I(P)$
- $\models_{D,I} \neg A$ ανν $\not\models_{D,I} A$
- $\models_{D,I} A \wedge B$ ανν $\models_{D,I} A$ και $\models_{D,I} B$
- $\models_{D,I} A \vee B$ ανν $\models_{D,I} A$ ή $\models_{D,I} B$
- $\models_{D,I} A \to B$ ανν $\not\models_{D,I} A$ ή ($\models_{D,I} A$ και $\models_{D,I} B$)
- $\models_{D,I} A \leftrightarrow B$ ανν $\models_{D,I} A \to B$ και $\models_{D,I} B \to A$

Για ένα σύνθετο κατηγόρημα Φ, $I^*(\Phi) = \{d \in D \mid \ \models_{D,I_d} \Phi(*)\}$, και :

1. $\models_{D,I_d} \forall x \Phi(x)$ αν και μόνο αν $I^*(\Phi) = D$
2. $\models_{D,I_d} \exists x \Phi(x)$ αν και μόνο αν $I^*(\Phi) \neq \emptyset$

Παράδειγμα: L = (C,F,P,V) όπου *C = {a}, F= {s,u},* P = {E,G}, V = {u,w,x,y,z}. Έστω *D = N*, όπου *N* το σύνολο των φυσικών αριθμών. Μια ερμηνεία *I* για την γλώσσα *L* ορίζεται ως εξής:

- $I(a) = 0$
- $I(s)(n) = n + 1$
- $I(u)(m,n) = m + n$
- $I(E) = \{n \in N \mid n' artios\} = \{0,2,4,6,8,...\}$
- $I(G) = \{(m,n) \in N \times N \mid m > n\}$

Η εκτεταμένη ερμηνεία I^* ορίζεται ως:

- $I'(a) = I(a) = 0$
- $I'(s(a)) = I(s)(I'(a)) = I(s)(I(a)) = 0 + 1 = 1$
- $I'(s(s(a))) = I(s)(I'(s(a))) = 1 + 1 = 2$
- ….
- $I'(u(s(a),u(a,s(a)))) = I(u)(I'(s(a)),I'(u(a,s(a)))) = I'(s(a)) + I'(u(a,s(a))) =$
  $1 + I(u)(I'(a),I'(s(a))) = 1 + (0+1) = 2$

Ισχύει $\models_{D,I} E(a)$; Ισχύει αν $I(a) \in I(E)$, δηλαδή αν $0 \in \{0,2,4,6...\}$.

Ισχύει $\models_{D,I} G(a,a)$; Ισχύει αν $(I(a),I(a)) \in I(G)$ δηλαδή αν $(0,0) \in I(G)$, το οποίο δεν ισχύει.

Ισχύει $\models_{D,I} E(s(s(a)))$; Ισχύει αν $I'(s(s(a))) \in I(E)$ δηλαδή αν $2 \in \{0,2,4,6...\}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\models_{D,I} E(a) \to E(s(s(a)))$ και $\models_{D,I} G(a,a) \wedge G(a,a) \to G(a,a)$

Το σχήμα *G(a,*)* ικανοποιείται από τις ερμηνείες I_d για τις οποίες $(0,d) \in I(G)$. Απαιτείται δηλαδή *0>d* . Άρα το σχήμα είναι ψευδές για κάθε φυσικό αριθμό *d*. Άρα, $I'(G(a,\_)) = \emptyset$ και επομένως $\not\models_{D,I} \exists y G(a,y)$.

Επίσης, $\models_{D,I} \forall x(E(x) \to E(s(s(x))))$ ανν $I'(E(x) \to E(s(s(x)))) = D$.
$I'(E(x) \to E(s(s(x)))) = \{d \in D \mid \models_{D,I_d} E(x) \to E(s(s(*)))\} = \{d \in D \mid \not\models_{D,I_d} E(*)\} \cup$
$\{d \in D \mid \not\models_{D,I_d} E(*)\} \cup \{d \in D \models_{D,I_d} E(*) \wedge E(s(s(*)))\} = \{1,3,5,7,...\} \cup \{d \in D \mid$
$d \in \{0,2,4,6,...\}, d+2 \in \{0,2,4,6,...\}\}\} = \{1,3,5,7,...\} \cup \{0,2,4,6,...\} = N = D$. Άρα, $\models_{D,I} \forall x(E(x) \to E(s(s(x))))$.

5. 7 Λογική Συνέπεια και Ισοδυναμία στον Κατηγορηματικό Λογισμό

Μια ερμηνεία *(D,I)* η οποία ικανοποιεί ένα σχήμα Α του κατηγορηματικού λογισμού λέγεται **μοντέλο** του Α.

Ορισμός: Ένα σύνολο S από σχήματα του Κατηγορηματικού Λογισμού είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει μια ερμηνεία *(D,I)* για την οποία $\models_{D,I} A$ για κάθε $A \in S$. Ισοδύναμα, ένα σύνολο σχημάτων είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει μοντέλο κάθε μέλους του S.

Παράδειγμα: $S_1 = \{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x), \exists x \neg Q(x)\}$. Υπάρχει μοντέλο αυτού του συνόλου;

Θεωρείστε $D = \{0,1\}, I(P) = \{0\}, I(Q) = \{0\}$

Τότε, $I'(P(\_)) = \{0\} \neq \emptyset$
$I'(\neg Q(\_)) = \{1\} \neq \emptyset$
$I'(P(\_) \to Q(\_)) = \{1\} \cup \{0\} = \{0,1\} = D$

Άρα η ερμηνεία (*D,I*) είναι μοντέλο του S_1

Παράδειγμα: $S_2 = \{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists xP(x), \neg\exists xQ(x)\}$**.** Υπάρχει μοντέλο αυτού του συνόλου;

Έστω (*D,I*) μια ερμηνεία που ικανοποιεί τα δύο πρώτα σχήματα του S_2. Εφόσον, $\models_{D,I} \exists xP(x)$, τότε $I(P) \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $d \in I(P)$. Αφού $\models_{D,I} \forall x(P(x) \to Q(x))$, τότε $I'(P(\_) \to Q(\_)) = D$ και επομένως $d \in I'(P(\_) \to Q(\_))$ και $\models_{D,I_d} P(*) \to Q(*)$. Ξέροντας ότι $d \in I(P)$, πρέπει να ισχύει ότι $d \in I(Q)$. Άρα, $I(Q) \neq \emptyset$ και $\models_{D,I} \exists xQ(x)$. Η ερμηνεία που ικανοποιεί το $\exists xQ(x)$ δεν μπορεί να ικανοποιεί και το $\neg\exists xQ(x)$. Άρα το σύνολο δεν μπορεί να είναι ικανοποιήσιμο.

Η λογική συνεπαγωγή μπορεί να οριστεί βάσει της ικαποιησιμότητας: για ένα σύνολο σχημάτων S και ένα σχήμα *A*, $S \models A$ αν και μόνο αν $S \cup \{\neg A\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο σύνολο. Επίσης, $S \models A$ αν και μόνο αν το $S \cup \{\neg A\}$ δεν έχει μοντέλο.

Στο προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists xP(x)\} / \exists xQ(x)$ είναι έγκυρη. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι και η εξαγωγή συμπεράσματος $\forall x(P(x) \to Q(x)) / \exists xP(x) \to \exists xQ(x)$ είναι έγκυρη, άρα $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists xP(x) \to \exists xQ(x)$. Ισχύει όμως η αντίστροφη λογική συνεπαγωγή ·

Έστω $D = \{0,1\}, I(P) = \{0\}, I(Q) = \{1\}$. Τότε $\models_{D,I} \exists xP(x) \to \exists xQ(x)$. Αλλά, $I'(P(\_) \to Q(\_)) = \{1\} \neq D$ και επομένως η ερμηνεία (*D,I*) δεν ικανοποιεί την πρόταση $\forall x(P(x) \to Q(x))$.

Ορισμός: Δύο σχήματα A και B λέγονται <u>ισοδύναμα</u> αν ικανοποιούνται από τις ίδιες ακριβώς ερμηνείες, δηλαδή αν έχουν τα ίδια μοντέλα.

Έστω ότι M(A) δηλώνει το σύνολο των μοντέλων του A. Τότε για οποιοδήποτε σχήματα A και B, $A \models B$ αν και μόνο αν $M(A) \subseteq M(B)$ και $A \equiv B$ αν και μόνο αν $M(A) = M(B)$.

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την ισοδυναμία $\forall x\neg\Phi(x) \equiv \neg\exists x\Phi(x)$. Έστω ότι $\models_{D,I} \forall x\neg\Phi(x)$. Αυτό σημαίνει ότι $I'(\neg\Phi) = D$. Έστω κάποιο $d \in D$. Τότε $\models_{D,I_d} \neg\Phi(*)$ αν και μόνο αν $\not\models_{D,I_d} \Phi(*)$. Ξέρουμε όμως ότι $\models_{D,I_d} \neg\Phi(*)$ για κάθε $d \in D$, επομένως δεν υπάρχει $d \in D$ για το οποίο $\models_{D,I_d} \Phi(*)$, δηλαδή $I'(\Phi) = \emptyset$. Άρα, $\not\models_{D,I} \exists q\Phi(x)$ και $\models_{D,I} \neg\exists x\Phi(x)$. Παρόμοια δείχνουμε και το αντίστροφο.

Ορισμός: ένα σχήμα λέγεται <u>λογικά αληθές</u> αν ικανοποιείται από κάθε ερμηνεία και <u>λογικά ψευδές</u> αν δεν υπάρχει ερμηνεία που να το ικανοποιεί. Δηλαδή, |= A αν και μόνο αν για κάθε ερμηνεία (*D,I*), $\models_{D,I} A$ και $\not\models A$ αν και μόνο αν για κάθε ερμηνεία (*D,I*), $\models_{D,I_d} A$

Παράδειγμα: Το σχήμα $\forall x(F(x) \to \exists y(F(y)))$ είναι λογικά αληθές.

Έστω μια ερμηνεία (*D,I*). Τότε $\models_{D,I} \exists yF(y)$ ανν $I'(F) \neq \emptyset$. Έστω $e \in D$. Αν $e \in I(F)$, τότε $\models_{D,I_e} F(*) \to \exists yF(y)$. Αν $e \notin I(F)$, τότε $\models_{D,I_e} \neg F(*)$, οπότε $\models_{D,I_e} F(*) \to \exists yF(y)$. Σε κάθε περίπτωση, $I'(F(\_) \to \exists yF(y)) = D$, άρα

$\models_{D,I} \forall x(F(x) \rightarrow \exists y F(y))$. Η ερμηνεία (D,I) επιλέχτηκε αυθαίρετα, επομένως το επόμενο συμπέρασμα ισχύει για κάθε ερμηνεία.

Λογικά αληθείς προτάσεις δεν καλλούνται ταυτολογίες εκτός και αν είναι στιγμιότυπα ταυτολογιών του Προτασιακού Λογισμού. Για παράδειγμα, η $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y F(y))$ δεν είναι ταυτολογία (παρόλο που είναι λογικά αληθής), ενώ η $\forall x F(x) \text{Ï Ψ} \forall x F(x)$ είναι ταυτολογία. Επίσης, η πρόταση $\forall x(F(x) \text{Ï Ψ} F(x))$ δεν είναι ταυτολογία.

5.8 Συστήματα αποδείξεων για τον Κατηγορηματικό Λογισμό: Μορφολογική Παραγωγή

Οι κανόνες της μορφολογικής παραγωγής για τον Προτασιακό Λογισμό χρησιμοποιούνται και για τον Κατηγορηματικό Λογισμό.Χρειαζόμαστε όμως και κανόνες οι οποίοι να αναφέρονται σε σχήματα που χρησιμοποιούν ποσοδείκτες.

1. εισαγωγή - $\exists : \dfrac{\Phi(t), t : \text{όρος}}{\exists x \Phi(x)}$

   Αιτιολογία: η παραδοχή Φ(t) σημαίνει ότι για να είναι αληθής σε μια ερμηνεία, πρέπει $I'(t) \,\Xi\, I'(\Phi)$, δηλαδή $I'(\Phi)$ ΉΖ . Άρα αυτή η ερμηνεία ικανοποιεί και την $\exists x \Phi(x)$

2. Απαλοιφή - $\forall : \dfrac{\forall x \Phi(x)}{\Phi(t), t : \text{όρος}}$

   Αιτιολογία: $\models_{D,I} \forall x \Phi(x)$ σημαίνει ότι $I'(\Phi) = D$, άρα $I'(t) \,\Xi\, D$ αφού $I'(t) \,\Xi\, I'(\Phi)$.

   Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος ∀x R(x,a) / ∃x R(a,x) είναι έγκυρη με χρήση των κανόνων της μορφολογικής παραγωγής.

   (1) $\forall x R(x,a)$ (υπόθεση)

   (2) $R(a,a)$ (από (1) με απαλοιφή-$\forall$ και a/x)

   (3) $\exists x R(a,x)$ (από (2) με εισαγωγή-$\exists$ και x/a)

   Ο συμβολισμός a/x σημαίνει ότι η μεταβλητή x αντικαθίσταται από τη σταθερά α.

   Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι εξαγωγή συμπεράσματος $\{\forall x P(x) \text{Ï } \forall x \Psi P(x), \Psi P(a)\} / \Psi P(b)$ είναι έγκυρη με τη χρήση των κανόνων της μορφολογικής παραγωγής.

   (1) $\forall x P(x) \text{Ï } \forall x \Psi P(x)$ (υπόθεση)

   (2) υποπαραγωγή

       (2.1) $\forall x P(x)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

       (2.2) υποπαραγωγή

           (2.2.1) $P(b)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

           (2.2.2) $P(a)$ (από (2.1) με απαλοιφή-$\forall$ και a/x)

(2.2.3) $\Psi P(a)$ (υπόθεση)

(2.3) $\Psi P(b)$ (από (2.2) με εισαγωγή-Ψ)

(3) υποπαραγωγή

(3.1) $\forall x \Psi P(x)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

(3.2) $\Psi P(b)$ (από (3.1) με απαλοιφή-$\forall$ και b/x)

(4) $\Psi P(b)$ (από (2), (3) με απαλοιφή-$\vee$)

Διαδοχικές εφαρμογές των κανόνων της απαλοιφής-$\forall$ και της εισαγωγής-$\exists$ μπορούν να συμπτυχθούν σε ένα βήμα. Δηλαδή αντί της ακολουθίας

(1) $\forall x \forall y \forall z P(x, y, z)$

(2) $\forall y \forall z P(a, y, z)$

(3) $\forall z P(a, b, z)$

(4) $P(a, b, c)$

μπορούμε να γράφουμε

(1) $\forall x \forall y \forall z P(x, y, z)$

(2) $P(a, b, c)$ (απαλοιφή-$\forall$ και a/x, b/y, c/z)

Με παρόμοιο τρόπο:

(1) $P(a, b, c)$

(2) ∃x∃y∃z P(x,y,z) (εισαγωγή-$\exists$ και x/a, y/b, z/c)

Στη συνέχεια θα εισάγουμε τους κανόνες της εισαγωγής του καθολικού ποσοδείκτη και της απαλοιφής του υπαρξιακού ποσοδείκτη. Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θεωρείστε την ακόλουθη εξαγωγή συμπεράσματος

Κάθε τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο
Κάθε παραλληλόγραμμο έχει ίσες διαγωνίους

Κάθε τετράγωνο έχει ίσες διαγωνίους

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι ορθή (άρα και έγκυρη). Η εγκυρότητά της δικαιολογείται από τα ακόλουθα βήματα μιας μη-τυπικής απόδειξης:

(1) έστω ΑΒΓΔ ένα τετράγωνο

(2) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε είναι παραλληλόγραμμο

(3) Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

(4) Αν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε έχει ίσες διαγωνίους

(5) Άρα το ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγωνίους

(6) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε έχει ίσες διαγωνίους

(7) Κάθε τετράγωνο έχει ίσες διαγωνίους

Το τελευταίο βήμα γενικεύει το συμπέρασμα για το ΑΒΓΔ σε όλα τα τετράγωνα. Η γενίκευση αυτή είναι έγκυρη εφόσον το ΑΒΓΔ είναι ένα τυχαίο τετράγωνο και δεν συμμετέχει σε καμία από τις υποθέσεις.

Τυπικά, αν σε κάποια παραγωγή έχει γίνει η παραδοχή Φ(α), τότε μπορούμε να συμπεράνουμε $\forall x \Phi(x)$ αν η σταθερά *a* δεν εμφανίζεται στο Φ(_) ή σε μια υπόθεση της παραγωγής ή στην υπόθεση μιας μη-ολοκληρωμένης υποπαραγωγής.

3. Εισαγωγή: $-\forall : \dfrac{\Phi(\alpha)}{\forall x \Phi(x)}$

Παράδειγμα: Η προηγούμενη εξαγωγή συμπεράσματος μπορεί να τυποποιηθεί ως εξής: έστω ότι τα κατηγορήματα P,Q,R εκφράζουν τις ιδιότητες «τετράγωνο», παραλληλόγραμμο» και «έχει ίσες διαγωνίους» αντίστοιχα.

(1) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ (υπόθεση)

(2) $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$ (υπόθεση)

(3) υποπαραγωγή

   (3.1) $P(a)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

   (3.2) $P(a) \rightarrow Q(a)$ (από την (1) με απαλοιφή-$\forall$ και α/x)

   (3.3) $Q(a)$ (από (3.1), (3.2) με απαλοιφή συνεπαγωγής)

   (3.4) $Q(a) \rightarrow R(a)$ (από την (2) με απαλοιφή-$\forall$ και α/x)

   (3.5) $R(a)$ (από (3.3), (3.4) με απαλοιφή συνεπαγωγής)

(4) $P(a) \rightarrow R(a)$ (από (3) με εισαγωγή συνεπαγωγής)

(5) $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$ (από (4) με εισαγωγή-$\forall$)

Αν παραβιάζονται οι συνθήκες εφαρμογής του κανόνα της εισαγωγής-$\forall$, μπορούμε να φτάσουμε σε μη-έγκυρες εξαγωγές συμπερασμάτων.

Παράδειγμα: Παραβίαση της πρώτης συνθήκης

(1) $\forall x R(x,x)$

(2) $R(a,a)$ (απαλοιφή-$\forall$ και α/x)

(3) $\forall x R(x,a)$ (εισαγωγή-$\forall$ και x/a)

Παραβίαση δεύτερης συνθήκης:

(1) $R(a,b)$

(2) $\forall y R(a,y)$ (εισαγωγή-$\forall$ και y/b)

(3) $\forall x \forall y R(x,y)$ (εισαγωγή-$\forall$ και x/α)

(4) $\forall y R(b,y)$ (απαλοιφή-$\forall$ και b/x)

(5) $R(b,a)$ (απαλοιφή-$\forall$ και a/y)

Κανόνας απαλοιφής-$\exists$: Έστω ότι σε μια παραγωγή έχουμε εξάγει $\exists x \Phi(x)$ και έστω α μια σταθερά που ικανοποιεί τις συνθήκες του κανόνα της εισαγωγής-$\forall$. Έστω Α ένα σχήμα που δεν περιέχει το α και το οποίο παράγεται από το Φ(α). Τότε μπορούμε να εξάγουμε το Α από το $\exists x \Phi(x)$.

4. Απαλοιφή-$\exists$: $\dfrac{\exists x \Phi(x) \qquad \dfrac{\Phi(a)}{A}}{A}$

Παράδειγμα: Δείξτε ότι $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x)\} \models \exists x Q(x)$

(1) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ (υπόθεση)

(2) $\exists x P(x)$ (υπόθεση)

(3) υποπαραγωγή

(3.1) $P(a)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

(3.2) $P(a) \rightarrow Q(a)$ (από (1) με απαλοιφή-$\forall$ και α/χ)

(3.3) $Q(a)$ (από (3.1), (3.2) με απαλοιφή συνεπαγωγής)

(3.4) $\exists x Q(x)$ (από (3.3) με εισαγωγή-$\exists$ και α/χ)

(4) $\exists x Q(x)$ (από (2), (3) με απαλοιφή-$\exists$)

Παράδειγμα: Δείξτε ότι το σχήμα $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y F(y))$ είναι λογικά αληθές.

(1) Υποπαραγωγή

(1.1) $F(a)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

(1.2) $\exists y F(y)$ (από (1.1) με εισαγωγή-$\exists$ και y/a)

(2) $F(a) \rightarrow \exists y F(y)$ (από (1) με εισαγωγή συνεπαγωγής)

(3) $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y F(y))$ (από (2) με εισαγωγή-$\forall$ και x/a)