



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Από τα Quarks μέχρι το Σύμπαν

Ε. Οικονόμου

Τμήμα Φυσικής

Φ-403: Από τα Κουάρκ μέχρι το Σύμπαν

Ανακοίνωση 5: 17^η Οκτωβρίου 2013

Παρατήρηση θεωρίας:

Σωματίο μάζας m εγκλωβισμένο σε ομοιογενή «όγκο» Ω_d ακτίνας R ($\Omega_d \propto R^d$) σε χώρο d διαστάσεων με $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \dots = 0$ και $\langle p_i \rangle = 0$, $i = x, \dots$

Heisenberg:

$$\langle \vec{p}^2 \rangle_{\varepsilon_{\lambda.}} \propto \langle p_x^2 \rangle_{\varepsilon_{\lambda.}} = \Delta p_{x,\varepsilon_{\lambda.}}^2 \propto \hbar^2 / \Delta x^2 \propto \hbar^2 / \langle x^2 \rangle \propto \hbar^2 / R^2 \propto \hbar^2 / \Omega_d^{2/d} \quad (1)$$

$$\langle \varepsilon_K \rangle_{\varepsilon_{\lambda.}} = \langle \vec{p}^2 / 2m \rangle_{\varepsilon_{\lambda.}} \propto \hbar^2 / m \Omega_d^{2/d} \quad (2)$$

Pauli:

N όμοια σωματία με σπιν $1/2$ (φερμιόνια) εγκλωβισμένα σε «όγκο» Ω_d ακτίνας R ($\Omega_d \propto R^d$) σε χώρο d διαστάσεων θα ικανοποιούσαν την απαγορευτική αρχή του Pauli, αν χώριζαν τον «όγκο» Ω_d σε $N/2$ ίσους υποόγκους στον καθένα από τους οποίους τοποθετούνταν μόνο δύο σωματία (με αντίθετα σπιν). Τότε όμως κατά μέσο όρο το κάθε σωματίο θα εγκλωβιζόταν σε «όγκο» $2\Omega_d/N$ αντί του «όγκου» Ω_d και η κινητική του ενέργεια θα γινόταν $\langle \varepsilon_K \rangle \propto \hbar^2 N^{2/d} / m \Omega_d^{2/d}$.

Επομένως η ελάχιστη ολική κινητική ενέργεια N όμοιων σωματίων με σπιν $1/2$ (φερμιόνια) εγκλωβισμένων σε ομοιογενή «όγκο» Ω_d ακτίνας R ($\Omega_d \propto R^d$) σε χώρο d διαστάσεων ικανοποιεί τη σχέση

$$E_K = N \langle \varepsilon_K \rangle_{\varepsilon_{\lambda.}} \propto \hbar^2 N^{(d+2)/d} / m \Omega_d^{2/d} \propto \hbar^2 N^{(d+2)/d} / m R^2 \quad (3)$$

Για την εύρεση του αριθμητικού συντελεστή που θα μετατρέψει την (3) από αναλογία σε ισότητα υπάρχουν δύο δρόμοι: Ο ένας, προσεγγιστικός, συνίσταται στο να κρατήσουμε τους αριθμητικούς συντελεστές σε κάθε ένα από τα προηγούμενα βήματα (π.χ. $\langle x^2 \rangle = \langle r^2 \rangle / d = R^2 / 5$ για $d = 3$, βλ. (2.5)). Ο άλλος βασίζεται στην ρεαλιστική εικόνα ότι ένα σωματίο εγκλωβισμένο σε ομοιογενή «όγκο» Ω_d μπορεί να βρεθεί σε καταστάσεις που αντιστοιχούν σε διακριτές ενεργειακές στάθμες που τις κατατάσσουμε κατά σειρά ενέργειας και τις γεμίζουμε με σωματία διαδοχικά αρχίζοντας από την κατώτερη μέχρι να μας τελειώσουν τα N σωματία. Ας ονομάσουμε $\varepsilon_F(N)$ την ενέργεια της ανώτατης κατειλημμένης στάθμης. Αν προσθέσουμε ένα ακόμη όμοιο σωματίο στο σύστημα επιμένοντας στη διατήρηση της ελάχιστης ολικής ενέργειας, η αναπόφευκτη αύξηση της ολικής ενέργειας θα ισούται με $E_K(N+1) - E_K(N) = \varepsilon_F(N+1)$.

Το $\varepsilon_F(N+1)$ θα ισούται είτε με $\varepsilon_F(N+1) > \varepsilon_F(N)$ (αν το N είναι άρτιο) είτε με $\varepsilon_F(N)$ (αν το N είναι περιττό). Επομένως, κατά μέσο όρο

$$E_K(N+1) - E_K(N) = [E_K(N+1) - E_K(N)] / 1 = E_F \equiv [\varepsilon_F(n+1) + \varepsilon_F(n)] / 2,$$

που σημαίνει ότι

$$E_F = \partial E_K / \partial N \quad (4)$$

Η μέγιστη κατειλημμένη ενέργεια E_F συνδέεται με την μέγιστη κατειλημμένη ορμή $p_F = \hbar k_F$ (σε ένα ομοιογενή «όγκο» Ω_d και στο όριο όπου $N \rightarrow \infty$, $\Omega_d \rightarrow \infty$ με $N/\Omega_d = \text{σταθ.}$) με την προφανή σχέση $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$.

Η k_F μπορεί να υπολογισθεί εύκολα χρησιμοποιώντας τη γενική και πολύ χρήσιμη σχέση

$$\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = [\Omega_d / (2\pi)^d] \int d^d k f(\vec{k}) \quad (5)$$

και τη σχέση

$$N = 2 \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = 2 [\Omega_d / (2\pi)^d] \int_0^{k_F} d^d k \quad (6)$$

όπου στην προκειμένη περίπτωση για να ισχύει η (6), η $f(\vec{k})$ είναι μονάδα για $|\vec{k}| \leq k_F$ (δηλαδή για τις κατειλημμένες καταστάσεις) και μηδέν για τις μη κατειλημμένες. Το ολοκλήρωμα στην (6) δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο «όγκος» στον χώρο των \vec{k} που ισούται με $2k_F$, πk_F^2 , $(4\pi/3)k_F^3$ για $d=1, 2, 3$ αντιστοίχως. Άρα, αντικαθιστώντας στην (6) βρίσκουμε:

Για $d=1$, $k_F = (\pi/2)(N/2R) \equiv (\pi/2)n$, όπου n είναι η συγκέντρωση των σωματιών.

Για $d=2$, $k_F = (2\pi n)^{1/2}$ και για $d=3$ $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$.

Από την τελευταία αυτή σχέση και την (3) έχουμε

$$\text{για } d=3: E_K = (3/5)(\hbar^2 k_F^2 / 2m)N = 0,3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N^{5/3} / mV^{2/3} = 2,8712 \hbar^2 N^{5/3} / mV^{2/3} \quad (7)$$

Στα παραπάνω θεωρήσαμε ότι $mc^2 \gg c|\vec{p}|$ ώστε η ακριβής σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας

$$\text{και ορμής } \varepsilon_K = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2} - m c^2 \text{ να γίνει } \varepsilon_K = p^2 / 2m.$$

Στο αντίθετο όριο $mc^2 \ll c|\vec{p}|$ η σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής γίνεται $\varepsilon_K = c|\vec{p}|$

. Μπορεί να δείξει κανείς ότι $\langle |\vec{p}| \rangle = [\sqrt{d(d+2)} / (d+1)] \sqrt{\langle p^2 \rangle} \propto \sqrt{\langle p^2 \rangle}$, όπου d είναι η

διάσταση του χώρου. Με βάση την παραπάνω σχέση, την $\varepsilon_K = c|\vec{p}|$ και την (1) έχουμε

$$\langle \varepsilon_K \rangle_{\varepsilon_K} \propto c \hbar / R \propto c \hbar / \Omega_d^{1/d} \quad (2^a)$$

Με την ίδια όπως προηγουμένως επιχειρηματολογία βασισμένη στην απαγορευτική του Pauli έχουμε λαμβάνοντας υπόψη την (2^a)

$$E_K = N \langle \varepsilon_K \rangle_{\varepsilon_K} \propto c \hbar N^{(d+1)/d} / \Omega_d^{1/d} \propto c \hbar N^{(d+1)/d} / R \quad (3^a)$$

Οι σχέσεις (4) έως (6) παραμένουν εν ισχύ, αφού δεν εξαρτώνται από τη σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής. Η αντίστοιχη της (7) για $d=3$ είναι:

$$E_K = (3/4)c \hbar k_F N = (3/4)(3\pi^2)^{1/3} (c \hbar N^{4/3} / V^{1/3}) = 2,3202 (c \hbar N^{4/3} / V^{1/3}) = 1,4393 (c \hbar N^{4/3} / R)$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ε. Οικονόμου, 2014. «Από τα Quarks μέχρι το Σύμπαν». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

