

ΕΦ3: Από τα Κουάρκ μέχρι το Σύμπαν

Ανακοίνωση 6: 20^η Οκτωβρίου 2013

Ασκήσεις:

1) Θεωρήστε $N > 1$ μη σχετικιστικά φερμιόνια με σπιν $\frac{1}{2}$ που είναι εγκλωβισμένα σε:

(1) ένα μονοδιάστατο ομοιογενή χώρο συνολικού μήκους $2R$

(2) διδιάστατο ομοιογενή κυκλικό χώρο ακτίνας R

Ακολουθώντας το σκεπτικό των σελίδων 36-40 του βιβλίου υπολογίστε την μίνιμουμ συνολική κινητική ενέργεια για τις παραπάνω δύο περιπτώσεις καθώς και τις αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ ελάχιστης συνολικής κινητικής ενέργειας και της αντίστοιχης ενέργειας Fermi. Για τις παραπάνω δύο περιπτώσεις γράψτε τις αντίστοιχες με την (2.15) προσεγγιστικές σχέσεις

2) Για την περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου ποια είναι η αριθμητική σταθερά a στον τύπο (2.16). Ως χαρακτηριστικό μήκος θεωρήστε την ακτίνα του Bohr $a_B = \hbar^2 / m_e e^2$ εκφρασμένη στο σύστημα G-CGS. Στο SI είναι $a_B = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2$

3) Σε ένα αρμονικό ταλαντωτή (με παραμέτρους κ , m), όπου Δx είναι η τυπική απόκλιση από τη θέση ισορροπίας για τη βασική κατάσταση, υπολογίστε την ολική ενέργεια (κινητική και δυναμική) της βασικής κατάστασης ως συνάρτηση της κλασικής κυκλικής συχνότητας του ταλαντωτή.

4) Θεωρήστε ένα ουδέτερο άτομο με ατομικό αριθμό $Z \gg 1$. Εκτιμήστε την εξάρτηση από το Z της μέσης απόστασης a ενός ηλεκτρονίου από τον πυρήνα καθώς και αυτήν της συνολικής ενέργειας E του ατόμου (κβαντικής κινητικής ενέργειας όλων των ηλεκτρονίων και συνολικής ενέργειας Coulomb). Η εμπειρική τιμή του a σε ατομικές μονάδες είναι $a \approx 0,424 Z^{-1/3}$ και του E είναι $E \approx -0,589 Z^{7/3} \approx -16 Z^{7/3} \text{ eV}$.

5) Αποδείξτε τη σχέση

$$dG \leq -SdT + VdP + \partial E_m$$

6) Δύο ίδια σώματα, A και B βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες $T_A > T_B$. Οι θερμοχωρητικότητες τους είναι ίδιες και ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Τα δύο σώματα (με τη βοήθεια ενός τρίτου βοηθητικού που εκτελεί κυκλικές διαδικασίες) φτάνουν σε ολική θερμοδυναμική ισορροπία υπό συνθήκες άντλησης του μεγίστου έργου (χωρίς ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον). Ποια είναι η τελική θερμοκρασία; Τι ποσοστό της ενέργειας που έχασε το σώμα A έγινε έργο;

$$\text{Απάντηση: } T = \sqrt{T_A T_B}, \quad \eta = (\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B}) / \sqrt{T_A}$$

7) Δείξτε ότι $\Omega = -PV$

8) Με βάση ότι οι θερμοδυναμικές ποσότητες είναι είτε εκτατικές είτε εντατικές δείξτε ότι $U = N\varphi_1(V/N, S/N)$, $H = N\varphi_2(P, S/N)$,

$$F = N\varphi_3(T, V/N), \quad G = N\varphi_4(T, P) = N\mu, \quad \Omega = V\varphi_5(T, \mu)$$

9) Προσδιορίστε το μέγιστο έργο που μπορεί να αντλήσει κανείς συνδέοντας κατάλληλα δύο δοχεία που περιέχουν το ίδιο ιδανικό αέριο με την ίδια θερμοκρασία T_0 και τον ίδιο αριθμό σωματιών N το καθένα αλλά διαφορετικών όγκων V_1 και V_2 . Ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία; Για ένα ιδανικό αέριο ισχύουν οι σχέσεις

$$S = Nk_B \left\{ \ln \frac{V}{Na^3} + \frac{3}{2} \ln \frac{U}{N\varepsilon} + c_1 \right\} \quad \text{και} \quad U = \frac{3}{2} Nk_B T$$

όπου a είναι η μονάδα μήκους, $\varepsilon = h^2 / ma^2$ και c_1 είναι μια αριθμητική σταθερά. Μπορείτε να δικαιολογήσετε τους παραπάνω τύπους; Εάν συνδέσετε τα δύο δοχεία χωρίς να αντλήσετε έργο ή να προσδώσετε θερμότητα ποια θα είναι η τελική τιμή της εντροπίας;

10) Αφού μελετήσετε το Παράρτημα V (είτε από το βιβλίο είτε από το λυμένο δείγμα εξέτασης που θα βρείτε στην αρχική σελίδα του e-course) σχεδιάστε στο επίπεδο F, T την ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz F ως συνάρτηση του T για σταθερό V για σύστημα σε ισορροπία. Τοποθετήστε στο επίπεδο αυτό ένα σημείο που να αντιπροσωπεύει μια κατάσταση μη ισορροπίας με την ίδια θερμοκρασία και όγκο όπως η κατάσταση ισορροπίας. Ποιο είναι το μέγιστο έργο που μπορείτε να αντλήσετε κατά τη μετάβαση στην ισορροπία υπό T, V σταθερά; Αν κατά τη μετάβαση στην ισορροπία η εντροπία αυξηθεί κατά ΔS πόσο θα είναι το έργο που θα αντλήσετε;

Λευτέρης Οικονόμου