



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εισαγωγή στη Σύγχρονη Φυσική II

Θ. Ν. Τομαράς

Τμήμα Φυσικής

1. Σε λεπτή επιφάνεια είναι χαραγμένες δύο παράλληλες σχισμές αμελητέου πάχους σε απόσταση $d=12\text{\AA}$ μεταξύ τους. Δέσμη νετρονίων ορμής $p = 2\pi\hbar/(5\text{\AA})$ ($\hbar \equiv 2\pi\hbar = 6.63 \times 10^{-34} \text{Jsec}$ είναι η σταθερά του Planck) πέφτει πάνω στην οθόνη. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα των νετρονίων της δέσμης σε m/sec. (β) Πόσο είναι το μήκος κύματος της δέσμης των νετρονίων; (γ) Πόσα τοπικά μέγιστα και σε τι γωνίες θα παρατηρηθούν πάνω σε οθόνη, που βρίσκεται πίσω από την επιφάνεια σε μεγάλη απόσταση και είναι παράλληλη προς αυτήν;

Λύση: (α) Η ορμή των νετρονίων της δέσμης είναι $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2} = mc\beta\sqrt{1 - \beta^2}$. Οπότε,

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \frac{pc/mc^2}{\sqrt{1 + (pc/mc^2)^2}}. \quad (1)$$

$$pc/mc^2 = \frac{2\pi\hbar c}{mc^2 \times 5\text{\AA}} = (\hbar = c = 1) \frac{2\pi}{m\lambda} = \frac{2\pi}{1\text{GeV} \times 5\text{\AA}} \simeq 2.5 \times 10^{-6}. \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω βρισκω

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \simeq 2.5 \times 10^{-6} \quad (3)$$

και από αυτήν

$$v \simeq 750 \text{ m/sec} \quad (4)$$

(β) Από την $p = h/\lambda = h/5\text{\AA}$ έπεται ότι το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων της δέσμης είναι $\lambda = 5\text{\AA}$.

(γ) Οι θέσεις των τοπικών μεγίστων είναι στις γωνίες θ_n που ικανοποιούν τη σχέση $\sin \theta_n = n\lambda/d = n \times 5\text{\AA}/12\text{\AA} = 5n/12$ με $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Επιτρεπόμενες τιμές του ακραίου n είναι οι $n = 0, \pm 1, \pm 2$, και αντιστοιχούν σε 5 μέγιστα, ήτοι το κεντρικό ($\theta_0 = 0$) και από δύο ένθεν και ένθεν αυτού.

2. Εκτιμήστε την ενέργεια που πρέπει να έχει δέσμη πρωτονίων ικανή να διερευνήσει την δομή της ύλης σε αποστάσεις της τάξης των 10^{-17} cm .

Λύση: Για να διερευνήσω αποστάσεις της τάξης του $R \simeq 10^{-17} \text{ cm}$, χρειάζομαι διακριτική ικανότητα $\delta \sim \lambda \sim R \sim h/p$. Οπότε, η ορμή των πρωτονίων της δέσμης που θα χρησιμοποιήσω, πρέπει να είναι $p \sim h/R \sim 2\pi\hbar/R \sim 2\pi\hbar \times 200 \text{ MeV} / (200 \text{ MeV} \times 10^{-13} \times 10^{-4} \text{ cm}) \sim 12.56 \text{ TeV}$. Πρωτόνια με τέτοια ορμή έχουν ενέργεια $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \sim pc \sim 12.56 \text{ eV}$.

3. (α) Πυρήνας με ${}^7_2\text{N}$ παράχθηκε στο εργαστήριο. Είναι ευσταθής ή ασταθής; Αν είναι ασταθής πώς διασπάται; Εξηγήστε.

(β) Το ίδιο για τον πυρήνα ${}^8_3\text{Li}$.

(γ) Συμφωνούν τα συμπεράσματά σας με τα στοιχεία που έχουν οι πίνακες των πυρήνων;

Λύση: (α) Τοποθετείστε τα πρωτόνια και τα νετρόνια στις ενεργειακές στάθμες του πυρήνα. Η κατανομή που καταλήγετε είναι ασταθής. Συμφέρει ενεργειακά ένα πρωτόνιο της τέταρτης στάθμης να μετατραπεί σε νετρόνιο και να πέσει στη τρίτη

στάθμη, εκπέμποντας ένα ποζιτρόνιο και ένα ηλεκτρονικό νευτρίνο (ραδιενέργεια β^+).



(β) Ομοίως, ο πυρήνας με 5 νευτρόνια και 3 πρωτόνια είναι ασταθής. Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνετε ότι δίνει ραδιενέργεια β^- :



(γ) Οι πίνακες του βιβλίου του *Serway* δεν έχουν καθόλου στοιχεία για τους δοσμένους αρχικούς πυρήνες. Μοιάζει να είναι τόσο ασταθείς (σύμφωνα και με τα παραπάνω συμπεράσματα) που δεν αναφέρονται καν σε τέτοιους περιληπτικούς πίνακες.

4. Να χωρίσετε σε μποζόνια και φερμιόνια τα εξής σωματάρια: νευτρόνιο, πυρήνας 3He , άτομο 4He , άτομο 3H , άτομο 2H , πυρήνας ${}^{12}_6C$, άτομο ${}^{14}_7N$, πυρήνας 9_3Li . Εξηγήστε με σαφήνεια τον ισχυρισμό σας.

Λύση: Φερμιόνια είναι τα σωματάρια με ημισακέραιο σπιν. Οι δέσμες καταστάσεις περιτού αριθμού φερμιονίων έχουν ημισακέραιο σπιν και επομένως είναι φερμιόνια. Αντίστοιχα, τα μποζόνια έχουν ακέραιο σπιν. Οι δέσμες καταστάσεις άρτιου αριθμού φερμιονίων είναι μποζόνια. Έτσι φερμιόνια είναι τα: νευτρόνιο, πυρήνας 3He , άτομο 2H , άτομο ${}^{14}_7N$. Τα υπόλοιπα είναι μποζόνια.

5. Στο μάθημα Φ3 έχετε υπολογίσει τις ενεργειακές στάθμες ενός σωματιδίου μάζας m σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού εύρους L και έχετε βρει

$$E_n(m) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

(α) Πέντε πρωτόνια και τρία νευτρόνια βρίσκονται μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι με $L=10F$. Αγνοήστε τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις (μια πολύ χονδρική προσέγγιση) και υπολογίστε σε μονάδες eV ή πολλαπλάσιά του την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος. Δίδονται $m_p \simeq m_n \simeq 1GeV/c^2$ και $m_D \simeq 2GeV/c^2$.

(β) Το ίδιο για 5 πρωτόνια και 3 πυρήνες δευτερίου.

(γ) Το ίδιο για 8 πυρήνες δευτερίου.

Λύση: (α) Τα πρωτόνια όσο και τα νευτρόνια έχουν σπιν 1/2 και επομένως είναι φερμιόνια με δύο δυνατές καταστάσεις, σπιν πάνω και σπιν κάτω. Στην προσέγγιση που οι μάζες του πρωτονίου και του νευτρονίου είναι ίσες, οι ενεργειακές στάθμες των δύο ειδών σωματιδίων ταυτίζονται. Άρα κάθε κατάσταση μπορεί να χωρέσει το πολύ μέχρι δύο πρωτόνια και δύο νευτρόνια. Οπότε, η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης στην περίπτωση αυτή είναι

$$E(5p, 3n) = 4E_1(m_p) + 3E_2(m_p) + E_3(m_p) \quad (8)$$

(β) 5 πρωτόνια και 3 πυρήνες δευτερίου. Τα 5 πρωτόνια θα κατανεμηθούν όπως και προηγουμένως. Οι πυρήνες δευτερίου, που είναι μποζόνια (έχουν σπιν 1), θα πάνε όλα στη κατώτερη στάθμη των δευτερίων. Προσέξτε, οι στάθμες των δευτερίων έχουν διαφορετικές ενέργειες από αυτές των νουκλεονίων λόγω της διαφορετικής τους μάζας. Οπότε,

$$E(5p, 3D) = 2E_1(m_p) + 2E_2(m_p) + E_3(m_p) + 3E_1(m_D) \quad (9)$$

(γ) Τα 8 δευτέρια θα καταλάβουν όλα τη θεμελιώδη στάθμη τους. Επομένως

$$E(8D) = 8E_1(m_D) \quad (10)$$

Αριθμητική εφαρμογή: (Σας υπενθυμίζω ότι σε μονάδες $\hbar = c = 1$ ισχύει $200MeV \times 1F = 1$.)

$$E_n(m_p) = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_p L^2} = n^2 \frac{\pi^2 \times 200MeV}{2 \times 5 \times 200MeV \times 10^2 F^2 \times 200MeV} \quad (11)$$

$$= n^2 \frac{2\pi^2 10^2}{10^3} MeV = 1.974n^2 MeV \simeq 2n^2 MeV \quad (12)$$

Αντίστοιχα, οι ενεργειακές στάθμες των πυρήνων δευτερίου είναι

$$E_n(m_D) = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_D L^2} = \frac{m_p}{m_D} E_n(m_p) = 0.5 \times 1.974n^2 MeV \simeq n^2 MeV \quad (13)$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω παίρνω:

$$(\alpha) E(5p, 3n) = (4 \times 2 \times 1^2 + 3 \times 2 \times 2^2 + 1 \times 2 \times 3^2) MeV = 58 MeV$$

$$(\beta) E(5p, 3D) = (2 \times 2 \times 1^2 + 2 \times 2 \times 2^2 + 1 \times 2 \times 3^2 + 3 \times 1^2) MeV = 41 MeV.$$

$$(\gamma) E(8D) = 8 \times 1^2 MeV = 8 MeV.$$

6. Να υπολογισθεί η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο του πυρήνα Μολύβδου $^{208}_{82}Pb$. Δίδονται η μάζα M του **ατόμου** του $^{208}_{82}Pb$ ίση προς $207.97664u$, η μάζα του πρωτονίου $1.007276u$, η μάζα του νετρονίου $1.008665u$ και η μάζα του ηλεκτρονίου $0.000549u$. Για τον υπολογισμό της μάζας του πυρήνα του Pb , που θα χρειαστείτε, χρησιμοποιήστε τις γνώσεις σας για τις τυπικές ενέργειες σύνδεσης των ηλεκτρονίων στα άτομα.

Λύση: Η ενέργεια σύνδεσης του ουρανίου είναι $E_b = (82m_p + 126m_n - M_{nucleus})c^2 \simeq (82m_p + 126m_n - M_{atom} + 82m_e)c^2 \simeq (82 \times 1.007276 + 126 \times 1.008665 - 207.97664 + 82 \times 0.000549)uc^2 \simeq 1636.424064 MeV$.

Οπότε, η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο είναι $\epsilon_b = (1636.424064/208) MeV = 7.8674 MeV$.

Στον παραπάνω υπολογισμό έχω αγνοήσει την ενέργεια σύνδεσης των ηλεκτρονίων στο άτομο. Όπως έχουμε συζητήσει στο μάθημα αυτή είναι 10^6 φορές μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας των ηλεκτρονίων και επομένως είναι αμελητέα στην προσέγγιση που κάνουμε εδώ.

7. Σε φασματογράφο μάζας με μαγνητικό πεδίο $B = 10^{-3} Tesla$ εισέρχεται πυρήνας $^{16}_8O$ με ορμή $p = 50 keV/c$. Υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου, που θα διαγράψει.

Οι πυρήνες οξυγόνου με τόσο μικρή ορμή είναι μή σχετικιστικοί. Επομένως, μπορώ με καλή προσέγγιση να χρησιμοποιήσω τον τύπο $mv^2/R = qvB$ για την κίνησή τους μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Κάνοντας χρήση επιπλέον και των σχέσεων $1T = 1kg/A \times sec^2 = 1kg/Cb \times sec$ και $1eV = 1|e|J/Cb$ με $|e|$ την απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου, παίρνω

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{50keV}{c \times 8|e| \times 10^{-3}T} = \frac{5 \times 10^4 |e| J/Cb}{3 \times 10^8 (m/sec) \times 8|e| \times 10^{-3} (kg/Asec^2)} = \quad (14)$$

$$= \frac{5 \times 10^4 m}{24 \times 10^5} = 2.085 cm \quad (15)$$

8. Η μάζα του πρωτονίου οφείλεται στην ενέργεια των κουάρκ και των γλιονίων που περιέχει σε αναλογία περίπου 1:1. Με δεδομένο ότι το μέγεθος του πρωτονίου είναι της τάξης του ενός Fermi και του γεγονότος ότι περιέχει τρία κουάρκ μάζας μερικών MeV το καθένα, χρησιμοποιείστε την αρχή της αβεβαιότητας και εκτιμήστε την μάζα του.

Λύση: Η αβεβαιότητα στη θέση του κάθε κουάρκ στο πρωτόνιο είναι περίπου ίση με ένα Fermi. Η ορμή του θα είναι επομένως $p \sim \Delta p \sim \hbar/\Delta x = \hbar/R$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για σωμάτια με μάζα μηδέν βρίσκω ότι η ενέργεια του ενός κουάρκ στο πρωτόνιο θα είναι $E_1 \sim pc \sim \Delta pc \sim \hbar c/R$. Οπότε, η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου θα είναι η ενέργεια των τριών κουάρκ του, σύν η συνεισφορά των γλιονίων, ήτοι $Mc^2 \sim 2 \times 3 \times E_1 \sim 2 \times 3 \times \hbar c/R = 6 \times 200MeV/(200MeV \times 1F) = 1.2GeV$.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Θ. Ν. Τομαράς, 2014. «Εισαγωγή στη Σύγχρονη Φυσική II». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

