



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εισαγωγή στη Σύγχρονη Φυσική II

Θ. Ν. Τομαράς

Τμήμα Φυσικής

ΠΡΟΟΔΟΣ 1: ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 Ιανουαρίου 2014

Θ. Τομαράς

ΘΕΜΑ 1. (α) Ουδέτερο πόνιο (π^0) μάζας M και με ενέργεια E διασπάται εν πτήσει σε δύο φωτόνια 1 και 2 με ενέργειες και μέτρα ορμών (E_1, p_1) και (E_2, p_2) , αντίστοιχα. Το φωτόνιο 1 εκπέμπεται σε κατεύθυνση κάθετη στην κατεύθυνση κίνησης του πιονίου. Να υπολογίσετε την ενέργεια E_1 και τη γωνία θ , που σχηματίζει η ορμή του φωτονίου 2 με την αρχική κατεύθυνση κίνησης του πιονίου, συναρτήσει της μάζας και της ενέργειας του πιονίου.

(β) Αριθμητική εφαρμογή: Δίδεται η μάζα $M = 140MeV/c^2$, η ενέργεια $E = 420MeV$ του πιονίου και το ότι τα φωτόνια έχουν μάζα μηδέν. Υπολογίστε τα E_1 και θ .

Λύση: (α) Από διατήρηση ενέργειας και ορμής παίρνουμε (P είναι η ορμή του πιονίου και χρησιμοποιώ το ότι η ενέργεια του φωτονίου, που ως γνωστόν έχει μάζα μηδέν, ισούται με το μέτρο της ορμής του επί c):

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ Pc &= p_2 c \cos \theta = E_2 \cos \theta \\ p_1 &= p_2 \sin \theta \leftrightarrow E_1 = E_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Υψώνω στο τετράγωνο τις δύο τελευταίες, τις αθροίζω κατά μέλη και παίρνω:

$$P^2 c^2 + E_1^2 = E_2^2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώ την E_2 από την πρώτη και βρίσκω:

$$P^2 c^2 = E^2 - 2EE_1 \leftrightarrow 2EE_1 = E^2 - P^2 c^2 = M^2 c^4 \quad (3)$$

από την οποία προκύπτει

$$E_1 = \frac{M^2 c^4}{2E} \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες από τις (1) παίρνουμε:

$$\tan \theta = \frac{E_1}{Pc} = \frac{E_1}{\sqrt{E^2 - M^2 c^4}} = \frac{M^2 c^4}{2E\sqrt{(E - Mc^2)(E + Mc^2)}} \quad (5)$$

(β) Εφαρμογή: Τα δεδομένα ικανοποιούν τη σχέση: $E = 420MeV = 3Mc^2$. Άρα $E_1 = M^2 c^4 / (6Mc^2) = Mc^2 / 6 = 70MeV / 3$.

Επίσης,

$$\tan \theta = \frac{E_1}{\sqrt{(E - Mc^2)(E + Mc^2)}} = \frac{Mc^2}{6\sqrt{2}Mc^2} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \quad (6)$$

ΘΕΜΑ 2. Πόσοι περίπου (ακρίβεια 1% είναι αρκετή) από τους πυρήνες σε 20 γραμμάκια Καλίου (K), περιεκτικότητας 5% κατά βάρος σε ραδιενεργό ^{40}K θα έχουν διασπαστεί σε ένα εκατομμύριο έτη;

Δίδονται οι μάζες του πρωτονίου και του νετρονίου $m_p \simeq m_n \simeq 1.66 \times 10^{-24}$ gr και ο χρόνος ημιζωής του ^{40}K $T_{1/2} = 1.28 \times 10^9$ έτη.

Λύση: Αν N_0 το αρχικό πλήθος ραδιενεργών πυρήνων, οι πυρήνες που θα είναι ακόμα αδιάσπαστοι μετά από χρόνο t είναι

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{0.693t}{T_{1/2}}} \quad (7)$$

οπότε, αυτοί που έχουν διασπαστεί μέχρι τη στιγμή t είναι

$$\Delta N(t) = N_0 - N(t) = N_0 \left(1 - e^{-\frac{0.693t}{T_{1/2}}}\right) \quad (8)$$

Για $t = 10^6$ έτη, έχουμε

$$\frac{0.693t}{T_{1/2}} \simeq \frac{0.693 \times 10^6 \text{ years}}{1.28 \times 10^9 \text{ years}} \simeq 0.54 \times 10^{-3} \ll 1 \quad (9)$$

οπότε, μπορώ να χρησιμοποιήσω την προσέγγιση

$$e^{-\frac{0.693t}{T_{1/2}}} \simeq 1 - \frac{0.693t}{T_{1/2}} \quad (10)$$

και να πάρω

$$\Delta N(t = 10^6 \text{ years}) = N_0 - N(t = 10^6 \text{ years}) = N_0 \frac{0.693t}{T_{1/2}} = N_0 \times 0.54 \times 10^{-3} \quad (11)$$

Από τα 20 γραμμάρια Καλίου μόνο το 5% δηλαδή 1 γραμμάριο είναι ραδιενεργό. Για να βρώ τους αρχικούς ραδιενεργούς πυρήνες N_0 διαιρώ τη δοσμένη μάζα του ραδιενεργού υλικού δια της μάζας ενός ατόμου,

$$N_0 = \frac{M}{m_{atom}} \simeq \frac{1 \text{ gr}}{40 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr}} \simeq 1.5 \times 10^{22} \quad (12)$$

και παίρνω τελικά για τον αριθμό των διασπάσεων σε 10^6 years

$$\Delta N(t = 10^6 \text{ years}) = 1.5 \times 10^{22} \times 0.54 \times 10^{-3} \simeq 0.81 \times 10^{19} \quad (13)$$

ΘΕΜΑ 3. Ο επιταχυντής Large Hadron Collider (LHC) του CERN επιταχύνει πρωτόνια ($m_p \simeq 1 \text{ GeV}/c^2$), σε τελική ενέργεια $E=7 \text{ TeV}$. Να υπολογισθούν (α) η κινητική ενέργεια των πρωτονίων, (β) η ορμή τους με ακρίβεια τρίτου δεκαδικού ψηφίου και (γ) η ταχύτητά τους v/c με ακρίβεια όγδοου δεκαδικού ψηφίου. (δ) Έστω v το κοινό μέτρο της ταχύτητας δύο πρωτονίων 1 και 2, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και συγκρούονται στον επιταχυντή. Να υπολογίσετε την ταχύτητα V με την οποία το 1 βλέπει το 2 να το πλησιάζει και να αποδείξετε ότι η σχετική αυτή ταχύτητα V είναι μικρότερη από c .

Λύση: (α) $K = E - m_p c^2 = 7000 \text{ GeV} - 1 \text{ GeV} = 6999 \text{ GeV}$
(β) $p = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}/c = \frac{E}{c} \sqrt{1 - (m c^2/E)^2} = \frac{E}{c} \sqrt{1 - 1/(7 \times 10^3)^2} \simeq \frac{E}{c} \simeq 7.000 \text{ TeV}/c$.
(γ) Ισχύει $E = m_p c^2 \gamma(v)$. Από αυτήν προκύπτει $\gamma = E/m_p c^2 = 7 \times 10^3$. Οπότε $v^2/c^2 = 1 - 7000^{-2}$. Άρα $v/c = \sqrt{1 - 7000^{-2}} \simeq 1 - 0.98 \times 10^{-8} \simeq 0.99999999$
(δ) $V = \frac{v+v}{1+v^2/c^2} < c$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Θ. Ν. Τομαράς, 2014. «Εισαγωγή στη Σύγχρονη Φυσική II». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

