



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Λογική

Φροντιστήριο 2: Κανονικές Μορφές, Απλός Αλγόριθμος Μετατροπής σε CNF/DNF, Άρνηση

Δημήτρης Πλεξουσάκης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
συνένωση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης Creative Commons και ειδικότερα

Αναφορά – Μη εμπορική Χρήση – Όχι Παράγωγο Έργο v. 4.0
(Attribution – Non Commercial – Non-derivatives)



- Εξαιρείται από την ως άνω άδεια υλικό που περιλαμβάνεται στις διαφάνειες του μαθήματος, και υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης. Η άδεια χρήσης στην οποία υπόκειται το υλικό αυτό αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



HY-180 Περιεχόμενα

- Κανονικές μορφές (Normal Forms)
- Αλγόριθμος μετατροπής σε CNF-DNF
- Άρνηση (Negation)
- Βασικές Ισοδυναμίες με άρνηση
- Νόμος De Morgan
- Πίνακες Αληθείας

Κανονικές μορφές - Ορισμοί

- **Ορισμός:** Ένα γράμμα είναι οποιαδήποτε πρότυπη μεταβλητή. π.χ. A,B
Ένας ελάχιστος όρος → είναι ένα γράμμα ή η σύζευξη γραμμάτων

Παραδείγματα

- Το A είναι **γράμμα** και συγχρόνως **μέγιστος και ελάχιστος όρος**
- **ΑΒ , ΑΒΛC** → ελάχιστοι όροι
- **ΑΛΑ** → Δεν θεωρείται ελάχιστος όρος

Κανονικές μορφές - Ορισμοί

- Ένας μέγιστος όρος \rightarrow είναι ένα γράμμα ή η διάζευξη γραμμάτων

Παραδείγματα

- Το A είναι γράμμα και συγχρόνως μέγιστος και ελάχιστος όρος
- $A \vee B, A \vee B \vee C \rightarrow$ μέγιστοι όροι
- $A \vee A \rightarrow$ Δεν θεωρείται μέγιστος όρος

Κανονικές μορφές - Απορρόφηση

- Ορισμός: Ένας ελάχιστος (μέγιστος) όρος **M1** απορροφά έναν άλλο ελάχιστο (μέγιστο) όρο **M2** αν κάθε γράμμα του M1 είναι επίσης στο M2

Παράδειγμα:

Το **A** απορροφά το
A V C και το
A V C απορροφά το
A V C V B

Κανονικές μορφές - Απορρόφηση

- Ένας ελάχιστος (μέγιστος) όρος **M1** απορροφά πάντα τον εαυτό του

Παράδειγμα:

Το **A** απορροφά το
A και το

A	V	C
A	V	C

 απορροφά το

Κανονικές μορφές CNF -DNF

Συζευκτική Κανονική μορφή (CNF)

- Μια πρόταση είναι σε Συζευκτική Κανονική μορφή αν είναι μια σύζευξη από μέγιστους όρους κανέννας από τους οποίους δεν απορροφά κανένα άλλον
- (βλ. Διαλέξεις μαθήματος ενότητα 3.4)

Ορισμοί: Κανονικές μορφές CNF –DNF

Διαζευκτική Κανονική μορφή (DNF)

- Μια πρόταση είναι σε Διαζευκτική Κανονική μορφή αν είναι μια διάζευξη από ελάχιστους όρους κανέννας από τους οποίους δεν απορροφά κανένα άλλον

Κανονικές μορφές CNF -DNF

Διαζευκτική Κανονική μορφή (DNF)

Παραδείγματα:

$A \rightarrow \text{DNF}$

$B \rightarrow \text{DNF}$

$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge D) \rightarrow \text{DNF}$

$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge B) \rightarrow \text{OXI DNF, γιατί?}$

Γίνεται απορρόφηση: $(A \wedge B \wedge C)$ από το $(A \wedge C)$

$(A \wedge C) \vee (A \wedge B) \rightarrow \text{DNF}$

Αλγόριθμος Μετατροπής σε CNF

- (0) Αφαιρούμε μη -απαραίτητες παρενθέσεις π.χ. $(A \wedge B) \wedge C$ γράφεται ως $A \wedge B \wedge C$
- (1) Βρίσκουμε τη διάζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και περιέχει τουλάχιστον μία σύζευξη.
- Αν δεν υπάρχει τέτοια υπο πρόταση, πηγαίνουμε στο βήμα (3).
 - Αν υπάρχουν περισσότερες από μία, διαλέγουμε μία από αυτές.
- (2) Στη διάζευξη που επιλέγεται στο βήμα (1) εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης, αφαιρούμε περιττές παρενθέσεις. Επιστρέφουμε στο βήμα (1).
- (3) Απλοποιούμε κάθε διάζευξη χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία της αυτοπάθειας. $A \vee A \equiv A$ (ισοδυναμία αυτοπάθειας)
- (4) Αν υπάρχουν διαζεύξεις που χρησιμοποιούν **τα ίδια** γράμματα, κρατάμε μόνο μία από αυτές.
- (5) **Παραλείπουμε** κάθε διάζευξη που περιέχει όλα τα γράμματα μιας άλλης διάζευξης. (απορρόφηση)

Αλγόριθμος Μετατροπής σε DNF

- (0) Αφαιρούμε μη -απαραίτητες παρενθέσεις π.χ. $(A \vee B) \vee C$ γράφεται ως $A \vee B \vee C$
- (1) Βρίσκουμε τη σύζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και περιέχει τουλάχιστον μία διάζευξη.
 - Αν δεν υπάρχει τέτοια υποπρόταση, πηγαίνουμε στο βήμα (3).
 - Αν υπάρχουν περισσότερες από μία, διαλέγουμε μία από αυτές.
- (2) Στη σύζευξη που επιλέγεται στο βήμα (1) εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της σύζευξης, αφαιρούμε περιττές παρενθέσεις. Επιστρέφουμε στο βήμα (1).
- (3) Απλοποιούμε κάθε σύζευξη χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία της αυτοπάθειας. $A \wedge A \equiv A$ (ισοδυναμία αυτοπάθειας)
- (4) Αν υπάρχουν συζεύξεις που χρησιμοποιούν **τα ίδια** γράμματα, κρατάμε μόνο μία από αυτές.
- (5) **Παραλείπουμε** κάθε σύζευξη που περιέχει όλα τα γράμματα μιας άλλης σύζευξης. (απορρόφηση)

Άρνηση

- Σύμβολο άρνησης: \neg
- Σημασιολογικός κανόνας άρνησης:
- Μια ερμηνεία ικανοποιεί την πρόταση $\neg A$ **αν και μόνο αν** καθιστά την A ψευδή

Πίνακας αληθείας

A		$\neg A$
α		ψ
ψ		α

Βασικές Ισοδυναμίες με άρνηση- Νόμος De Morgan

- $\neg \neg A \equiv A$ (απαλοιφή διπλής άρνησης)
- $\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (Νόμος De Morgan)
- $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (Νόμος De Morgan)
- $A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$ (αποκλειστική διάζευξη)

Κανονικές μορφές - Συνένωση

- Δύο ελάχιστοι όροι **M1**, **M2** συνενώνονται σε έναν ελάχιστο όρο **M3**,
αν οι **M1**, **M2** περιέχουν όλα τα γράμματα του **M3** και ένα επιπλέον γράμμα το οποίο, στον ένα όρο είναι η άρνηση του επιπλέον γράμματος στον άλλο όρο.
- *Κάθε γράμμα και η άρνηση του συνενώνονται στον όρο **T**.*

Κανονικές μορφές - Συνένωση

- Παράδειγμα συνένωσης

M1: A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D

M2: A \wedge \neg B \wedge C \wedge D

Μετά από συνένωση έχουμε:

M3: A \wedge \neg B \wedge D

(βλ. Ενότητα 3.10 από διαλέξεις μαθήματος)

Κανονικές μορφές - Συνένωση

- Παράδειγμα συνένωσης

$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$



$(A \wedge \neg B \wedge C)$ \vee $(\neg A \wedge B)$ \vee $(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

$(\neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B)$

Πίνακας αληθείας

- Για οποιαδήποτε πρόταση του Προτασιακού Λογισμού που χρησιμοποιεί Λ και V μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα αληθείας.
- Αντίστροφο: Αν μας δίνεται ένας πίνακας αληθείας, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία πρόταση που αντιστοιχεί σε αυτόν.

Παράδειγμα

- Μας δίνεται ο πίνακας αληθείας

A	B		X
α	α		ψ
α	ψ		ψ
ψ	α		ψ
ψ	ψ		α

- Γράψτε μία πρόταση για τη στήλη X του πίνακα:

$$\neg A \wedge \neg B$$

Άσκηση

- Μας δίνεται ο πίνακας αληθείας

A	B	C	X
α	α	α	α
α	α	ψ	α
α	ψ	α	α
α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ

Ζητούμενο:

Γράψτε μία πρόταση για τη στήλη X του πίνακα αληθείας που σας δίνεται

Άσκηση

- Μας δίνεται ο πίνακας αληθείας

A	B	C	X
α	α	α	α
α	α	ψ	α
α	ψ	α	α
α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ

Ζητούμενο:

Γράψτε μία πρόταση για τη στήλη X του πίνακα αληθείας που σας δίνεται

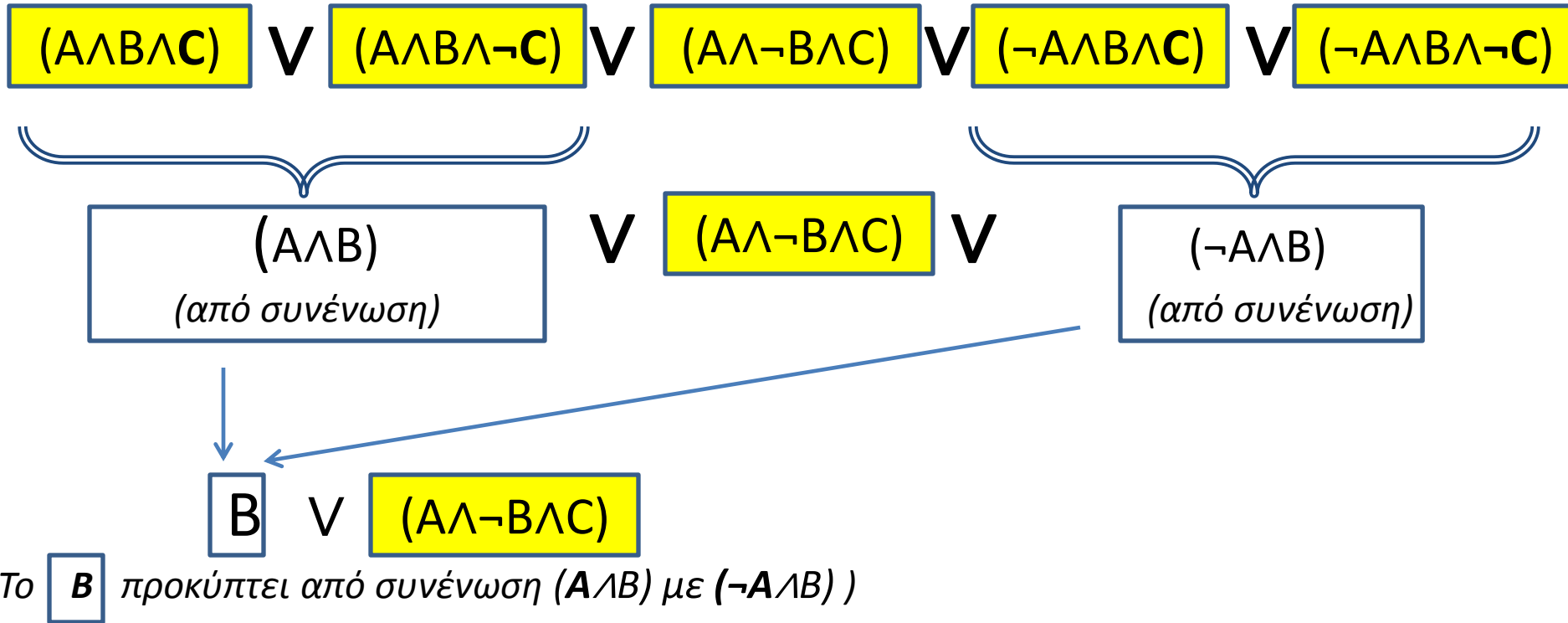
Λύση άσκησης

- Η Χ είναι αληθής όταν:

A	B	C	X	
α	α	α	α	$(A \wedge B \wedge C)$
α	α	ψ	α	$(A \wedge B \wedge \neg C)$
α	ψ	α	α	$(A \wedge \neg B \wedge C)$
α	ψ	ψ	ψ	
ψ	α	α	α	$(\neg A \wedge B \wedge C)$
ψ	α	ψ	α	$(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
ψ	ψ	α	ψ	
ψ	ψ	ψ	ψ	

Λύση άσκησης

- Η X είναι αληθής όταν:



Τέλος Φροντιστηρίου

