

---

# Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

Ασκήσεις 2ου Φροντιστηρίου:

Προτασιακός Λογισμός: Κανονικές Μορφές, Απλός  
Αλγόριθμος Μετατροπής σε CNF/DNF, Άρνηση

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

---

## Άδειες Χρήσης

- a. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης **Creative Commons** και ειδικότερα

**Αναφορά – Μη εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 3.0 Ελλάδα**

**(Attribution – Non Commercial – ShareAlike 3. Greece)**

**CC BY-NC-SA 3.0 GR**

- b. Εξαιρείται από την ως άνω άδεια υλικό που περιλαμβάνεται στις διαφάνειες του μαθήματος, και υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης. Η άδεια χρήσης στην οποία υπόκειται το υλικό αυτό αναφέρεται ρητώς.

## Χρηματοδότηση

- a. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- b. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- c. Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

## Αλγόριθμος μετατροπής σε CNF:

**Είσοδος:** Μία πρόταση του Π.Λ. που χρησιμοποιεί μόνο V και Λ

**Έξοδος:** Η πρόταση CNF

**Βήμα 0:** Αφαιρούμε τις μη απαραίτητες παρενθέσεις.

**Βήμα 1:** Βρίσκουμε τη **διάζευξη** που βρίσκεται σε **μεγαλύτερο βάθος** και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία **σύζευξη**.

Αν δεν υπάρχει τέτοια υποπρόταση, πηγαίνουμε στο **Βήμα 3**

Αν υπάρχουν περισσότερες από μία, διαλέγουμε τυχαία μία από αυτές.

**Βήμα 2:** Στην διάζευξη που επιλέγεται στο Βήμα 1 εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης

**Ισοδυναμία 4β:**  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

**Βήμα 3:** Απλοποιούμε κάθε διάζευξη χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία της αυτοπάθειας

**Ισοδυναμία:**  $A \vee A \equiv A$

**Βήμα 4:** Αν υπάρχουν διαζεύξεις που χρησιμοποιούν τα ίδια γράμματα , κρατάμε μόνο μία από αυτές

**Βήμα 5:** Παραλείπουμε κάθε διάζευξη η οποία περιέχει **τα ίδια γράμματα** και κρατάμε μόνο μία από αυτές (**απορρόφηση**)

**Άσκηση 1:** Να μετατρέψετε την πρόταση  $(A \wedge B) \vee ((B \vee ((C \wedge ((C \wedge D) \vee A)))) \wedge C$

σε **CNF (Συζευκτική Κανονική Μορφή)**

1. Αφαιρούμε τις μη απαραίτητες παρενθέσεις.  
Δεν υπάρχουν μη απαραίτητες παρενθέσεις, οπότε προχωράμε στο **Βήμα 1**
2. Βρίσκουμε τη **διάζευξη** που βρίσκεται σε **μεγαλύτερο βάθος** και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία **σύζευξη**.

Επιλέγουμε τη διάζευξη που βρίσκεται στο μεγαλύτερο βάθος την  **$(C \wedge D) \vee A$**

$$(A \wedge B) \vee ((B \vee ((C \wedge ((C \wedge D) \vee A)))) \wedge C)$$

3. Στην διάζευξη που επιλέγεται στο Βήμα 1 εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης και έχουμε:

$$(A \wedge B) \vee ((B \vee (C \wedge (C \vee A) \wedge (D \vee A))) \wedge C)$$

4. Επιστρέφουμε στο Βήμα 1 και προσπαθούμε να βρούμε τη διάζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία σύζευξη.

$$(A \wedge B) \vee ((B \vee (C \wedge (C \vee A) \wedge (D \vee A))) \wedge C)$$

5. Στην διάζευξη που επιλέξαμε στο προηγούμενο βήμα εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης και έχουμε:

$$(A \wedge B) \vee ((B \vee C) \wedge (B \vee C \vee A) \wedge (B \vee D \vee A) \wedge C)$$

6. Επιστρέφουμε στο Βήμα 1 και προσπαθούμε να βρούμε τη διάζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία σύζευξη.

$$(A \wedge B) \vee ((B \vee C) \wedge (B \vee C \vee A) \wedge (B \vee D \vee A) \wedge C)$$

7. Στην διάζευξη που επιλέξαμε στο προηγούμενο βήμα εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης και έχουμε:

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C \vee A) \wedge (A \vee B \vee D \vee A) \wedge (A \vee C) \wedge$$

$$(B \vee B \vee C) \wedge (B \vee B \vee C \vee A) \wedge (B \vee B \vee D \vee A) \wedge (B \vee C)$$

8. Απλοποιούμε κάθε διάζευξη χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία της αυτοπάθειας

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee D) \wedge (A \vee C) \wedge$$

$$(B \vee C) \wedge (B \vee C \vee A) \wedge (B \vee D \vee A) \wedge (B \vee C)$$

9. Αν υπάρχουν διαζεύξεις που χρησιμοποιούν τα ίδια γράμματα , κρατάμε μόνο μία από αυτές

$$(A \vee B \vee C) \wedge \{\underline{A} \vee \underline{B} \vee C\} \wedge (A \vee B \vee D) \wedge (A \vee C) \wedge$$

$$(B \vee C) \wedge \{\underline{B} \vee \underline{C} \vee A\} \wedge \{\underline{B} \vee \underline{D} \vee A\} \wedge \{\underline{B} \vee \underline{C}\}$$

Άρα έχουμε:

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee D) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

## 10. Απορρόφηση

Το  $(A \vee C)$  θα απορροφήσει το  $(A \vee B \vee C)$

Δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε κάποια άλλη απορρόφηση,

άρα έχουμε:

$(A \vee B \vee D) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)$  που είναι σε CNF

**Άσκηση 2:** Να μετατρέψετε την πρόταση  $(A \vee B) \wedge (A \vee (C \wedge B))$

- c. σε CNF (Συζευκτική Κανονική Μορφή) και
- d. σε DNF (Διαζευκτική Κανονική Μορφή) .

**a. Μετατροπή  $(A \vee B) \wedge (A \vee (C \wedge B))$  σε CNF**

1. Αφαιρούμε τις μη απαραίτητες παρενθέσεις.  
Δεν υπάρχουν μη απαραίτητες παρενθέσεις, οπότε προχωράμε στο **Βήμα 1**
2. Βρίσκουμε τη **διάζευξη** που βρίσκεται σε **μεγαλύτερο βάθος** και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία **σύζευξη**.



Επιλέγουμε τη διάζευξη που βρίσκεται στο μεγαλύτερο βάθος την  $A \vee (C \wedge B)$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee (C \wedge B))$$

3. Στην διάζευξη που επιλέγεται στο Βήμα 1 εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης και έχουμε:

$$(A \vee B) \wedge ((A \vee C) \wedge (A \vee B))$$

4. Αφαίρεση περιττών παρενθέσεων και επιστροφή στο Βήμα 1.

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (A \vee B)$$

5. Επιστρέφουμε στο Βήμα 1 και προσπαθούμε να βρούμε τη διάζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία σύζευξη.

Δεν υπάρχει τέτοια διάζευξη, άρα προχωράμε στο επόμενο βήμα

6. Απλοποιούμε κάθε διάζευξη χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία της αυτοπάθειας

Δεν υπάρχει διάζευξη στην οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε την ισοδυναμία της αυτοπάθειας, άρα προχωράμε στο επόμενο βήμα.

7. Αν υπάρχουν διαζεύξεις που χρησιμοποιούν τα ίδια γράμματα, κρατάμε μόνο μία από αυτές

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \underline{\overline{A \vee B}}$$

Η  $(A \vee B)$  υπάρχει δύο φορές, άρα κρατάμε μία από αυτές.

Η πρόταση που προκύπτει  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$  είναι σε CNF.

**b. Μετατροπή  $(A \vee B) \wedge (A \vee (C \wedge B))$  σε DNF**

1. Αφαιρούμε τις μη απαραίτητες παρενθέσεις.

Δεν υπάρχουν μη απαραίτητες παρενθέσεις, οπότε προχωράμε στο **Βήμα 1**

2. Βρίσκουμε τη σύζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία διάζευξη.  
Επιλέγουμε τη σύζευξη που βρίσκεται στο μεγαλύτερο βάθος η οποία περιέχει τουλάχιστον μία διάζευξη και είναι ολόκληρη η πρόταση

$$(A \vee B) \wedge (A \vee (C \wedge B))$$

3. Στην σύζευξη που επιλέγεται στο Βήμα 1 εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της σύζευξης και έχουμε:

$$(A \wedge (A \vee (C \wedge B))) \vee (B \wedge (A \vee (C \wedge B)))$$

4. Επιστρέφουμε στο Βήμα 1 και προσπαθούμε να βρούμε τη σύζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία διάζευξη.  
Έχουμε δύο συζεύξεις στο ίδιο βάθος που περιέχουν τουλάχιστον μία διάζευξη.

Επιλέγουμε τυχαία την 1<sup>η</sup> (  $(A \wedge (A \vee (C \wedge B)))$  ) και εφαρμόζουμε την

επιμεριστικότητα της σύζευξης.

$$(A \wedge A) \vee (A \wedge (C \wedge B)) \vee (B \wedge (A \vee (C \wedge B)))$$

5. Επιστρέφουμε στο Βήμα 1 και προσπαθούμε να βρούμε τη σύζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία διάζευξη.

$$(B \wedge (A \vee (C \wedge B)))$$

$$(A \wedge A) \vee (A \wedge (C \wedge B)) \vee ((B \wedge A) \vee (B \wedge (C \wedge B)))$$

6. Αφαιρούμε τις παρενθέσεις που δεν είναι απαραίτητες.

$$(A \wedge A) \vee (A \wedge C \wedge B) \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge C \wedge B)$$

7. Δεν υπάρχει άλλη σύζευξη που να βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και η οποία περιέχει τουλάχιστον μία διάζευξη, άρα προχωράμε στο επόμενο βήμα.

8. Απλοποιούμε κάθε σύζευξη χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία της αυτοπάθειας

$$A \vee (A \wedge C \wedge B) \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge C)$$

### 9. Απορρόφηση

$$A \vee \{ \underline{A} \wedge \underline{C} \wedge B \} \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge C)$$

Η πρόταση  $(B \wedge A)$  απορροφά την  $(A \wedge C \wedge B)$

Άρα έχουμε:

$$A \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge C)$$

Όμως και η πρόταση  $A$  απορροφά την  $(B \wedge A)$

$$A \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge C)$$

Άρα η πρόταση  $A \vee (B \wedge C)$  είναι σε DNF

- -