ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Λογική

Φροντιστήριο 3: Συνεπαγωγή/Ισοδυναμία, Ταυτολογίες/Αντινομίες, Πλήρης Αλγόριθμος Μετατροπής σε CNF

Δημήτρης Πλεξουσάκης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άρνηση

- Σύμβολο άρνησης: **¬**
- Σημασιολογικός κανόνας άρνησης:
  - Μία ερμηνεία ικανοποιεί την πρόταση ¬A **αν και μόνο αν** καθιστά την A **ψευδή**.

A		¬A
α		ψ
ψ		α

Βασικές ισοδυναμίες με άρνηση – De Morgan

- $\neg \neg A \equiv A$ **(απαλοιφή διπλής άρνησης)**
- $\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ **(Νόμος De Morgan)**
- $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ **(Νόμος De Morgan)**
- $A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$ **(αποκλειστική διάζευξη)**

Ταυτολογία - Αντινομία

- Με την εισαγωγή του συνδετικού της άρνησης μπορούμε να ορίσουμε τους έννοιες της ταυτολογίας/αντινομίας
- ***Ταυτολογία:*** πρόταση η οποία ικανοποιείται από κάθε ερμηνεία ή αλλιώς είναι ***<u>λογικά αληθής</u>*** (**Α** $\vee$ **¬ Α**)
- ***Αντινομία:*** πρόταση την οποία κάθε ερμηνεία καθιστά ψευδή ή αλλιώς είναι ***<u>λογικά ψευδής</u>*** (**Α** $\wedge$ **¬ Α**)

Α		**¬Α**	**Α $\vee$ ¬Α**	**Α $\wedge$ ¬Α**
α		ψ	**α**	**ψ**
ψ		α	**α**	**ψ**

Παραδείγματα(1/3)

- Δείξτε ότι το S: $\mathbf{A} \vee (\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B})$ είναι ταυτολογία
- **1ος τρόπος:**

Παρατηρούμε ότι
$(\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B}) \equiv (\neg \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B}))$

- Άρα έχουμε:

$A \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv$ (επιμερισμός του $\wedge$ πάνω στο $\vee$)

$A \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg B) \equiv$ (επιμερισμός του $\vee$ πάνω στο $\wedge$)

$(\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}) \wedge (A \vee (\mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B})) \equiv$

$T \wedge (A \vee T) \equiv$

$T \wedge T \equiv T$

Παραδείγματα(2/3)

- Δείξτε ότι το S: $\mathbf{A} \vee (\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B})$ είναι **ταυτολογία**
- **2ος τρόπος:**

Με πίνακα αληθείας:

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**¬A ⋀ B**	**¬A ⋀¬B**	**S**
α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	**α**
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	**α**
ψ	α	α	ψ	α	ψ	**α**
ψ	ψ	α	α	ψ	α	**α**

Παραδείγματα(3/3)

- Δείξτε ότι το S: **A ∧ B ∧ (¬A ∨ ¬ B) είναι αντινομία**

A ∧ B ∧ (¬A ∨ ¬ B) ≡ *(από τον νόμο De Morgan έχουμε)*

(A ∧ B) ∧ ¬ (A ∧ B)

- ***Άρα S είναι αντινομία***

Νέοι κανόνες απορρόφησης

- Οι **ταυτολογίες** και οι **αντινομίες** μας επιτρέπουν να ορίσουμε νέους κανόνες απορρόφησης:
- **T = ταυτολογία**
- **F = αντινομία**

Αν **S** οποιαδήποτε πρόταση, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$\mathbf{S \wedge T \equiv S}$$

$$\mathbf{S \wedge F \equiv F}$$

$$\mathbf{S \vee T \equiv T}$$

$$\mathbf{S \vee F \equiv S}$$

Λογική συνεπαγωγή/Ισοδυναμία

- **Λογική Συνεπαγωγή (Entailment): |=**
  - **A |= B** (Έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος του σχήματος B από το σχήμα A)
  - Δεν είναι δυνατόν να ισχύει συγχρόνως ότι το A είναι αληθές και το B ψευδές.

- **Λογική Ισοδυναμία (Equivalence): ≡**
  - **Ορισμός:** Αν ισχύει ότι **A |= B** και **B |= A** τότε τα σχήματα A και B είναι λογικά ισοδύναμα. **A ≡ B**

Λογική συνεπαγωγή/Ισοδυναμία

- **Προσοχή!** Οι εκφράσεις **A |= B** και **A ≡ B** **δεν** είναι προτάσεις του Προτασιακού Λογισμού. Είναι προτάσεις **για** τον Προτασιακό Λογισμό.

- *Αν θέλουμε να εκφράσουμε παρόμοιες συσχετίσεις συνεπαγωγής και ισοδυναμίας μεταξύ προτάσεων (ή συνόλου προτάσεων) του προτασιακού λογισμού και το αποτέλεσμα να είναι πρόταση του προτασιακού λογισμού χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:*

- **Material Implication (Συνεπαγωγή) :** $\rightarrow$
- **Material Equivalence (Ισοδυναμία) :** $\leftrightarrow$

Συνεπαγωγή

- Η πρόταση Α → Β του Προτασιακού Λογισμού είναι το ανάλογο της λογικής συνεπαγωγής Α |= Β.
- Η πρόταση αυτή μπορεί να εκφραστεί και με το συνδυασμό των συνδετικών ¬ και ∨ ως εξής:
  - **Α → Β ≡ ¬Α ∨ Β**
- Η **συνεπαγωγή** έχει τον παρακάτω πίνακα αληθείας:

X	Y	X→ Y
α	**α**	**α**
α	ψ	ψ
ψ	**α**	**α**
ψ	**ψ**	**α**

Ισοδυναμία

- Η πρόταση $A \leftrightarrow B$ του Προτασιακού Λογισμού είναι το ανάλογο της Λογικής Ισοδυναμίας $A \equiv B$.
- Μπορεί να εκφραστεί και ως: $(\mathbf{A} \land \mathbf{B}) \lor (\neg \mathbf{A} \land \neg \mathbf{B})$
  - Είναι **αληθής** όταν τα Α και Β έχουν ***την ίδια τιμή αληθείας***
  - $A \equiv B$ αν και μόνο αν $\models (\mathbf{A} \land \mathbf{B}) \lor (\neg \mathbf{A} \land \neg \mathbf{B})$
- Η ισοδυναμία έχει τον παρακάτω πίνακα αληθείας:

X	Y	X⇔ Y
α	**α**	**α**
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	**ψ**	**α**

Άσκηση 1

<u>Εκφώνηση 1:</u>

Εξετάστε αν η παρακάτω εξαγωγή συμπεράσματος είναι **έγκυρη:**

$$(\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \leftrightarrow \mathbf{P} \quad / \quad (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}) \vee \mathbf{P}$$

Λύση άσκησης 1

Q	R	P	Q⋁ R	(Q⋁R) ⇔P	R→Q	(R→ Q) ⋁P
α	α	α	α	**α**	α	**α**
α	α	ψ	α	ψ	α	α
α	ψ	α	α	**α**	α	**α**
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α
ψ	α	α	α	**α**	ψ	**α**
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	α	ψ	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	**α**	α	**α**

Λύση άσκησης 1

- Παρατηρούμε ότι όταν η πρόταση **$(Q \vee R) \leftrightarrow P$** είναι αληθής, τότε σε καμία περίπτωση η **$(R \rightarrow Q) \vee P$** δεν είναι ψευδής.

- Οπότε η εξαγωγή συμπεράσματος είναι **έγκυρη**.

Άσκηση 2

A	B	C	X
α	α	α	α
α	α	ψ	ψ
α	ψ	α	ψ
α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	α

Εκφώνηση: 2

Γράψτε μια πρόταση για τη στήλη X του πίνακα αληθείας και επαληθεύστε την απάντησή σας.

Άσκηση 3

<u>Εκφώνηση 3:</u>

Δείξτε την **<u>ισοδυναμία</u>** των ακόλουθων προτάσεων με χρήση γνωστών ισοδυναμιών του Προτασιακού Λογισμού και ***<u>χωρίς τη χρήση πινάκων αληθείας.</u>***

A) $(((P \lor Q) \land R) \lor (R \rightarrow (\neg Q \rightarrow R))) \rightarrow R$

B) $\neg (R \rightarrow \neg (R \lor P))$

Άσκηση 4

<u>Εκφώνηση 4:</u>
Δείξτε ότι η ακόλουθη πρόταση είναι **<u>ταυτολογία</u>** με χρήση γνωστών ισοδυναμιών του Προτασιακού Λογισμού και ***<u>χωρίς τη χρήση πινάκων αληθείας.</u>***

$(R \wedge Q) \rightarrow (R \vee ((R \wedge Q) \Leftrightarrow P))$

Κανονικές μορφές CNF – DNF(1/3)

- Επέκταση των προηγούμενων ορισμών έτσι ώστε να συμπεριληφθεί το σύμβολο της άρνησης
- ***Γράμμα***: μία πρότυπη μεταβλητή ή η άρνηση μίας πρότυπης μεταβλητής.
- πχ. A, ¬A, B, ¬B
- ***Ελάχιστος/Μέγιστος όρος***: γράμμα ή σύζευξη/διάζευξη γραμμάτων από τα οποία κανένα δεν είναι η άρνηση κάποιου άλλου ή ένα από τα σύμβολα F, T.
  - πχ. Ελάχιστοι όροι: A, ¬A, A∧¬B, F, T όχι όμως A∧B∧¬B
  - Μέγιστοι όροι: A, ¬A, A∨¬B, F, T αλλά όχι A∨B∨¬B

Κανονικές μορφές CNF – DNF(2/3)

- ***Απορρόφηση***: Ένας ελάχιστος/μέγιστος όρος M_1 <u>απορροφά</u> έναν ελάχιστο/μέγιστο όρο M_2 αν κάθε γράμμα του M_1 είναι στον M_2. Κάθε ελάχιστος όρος απορροφά το F και απορροφάται από το T.
  - πχ. Ο κάθε ένας από τους παρακάτω όρους απορροφά όλους τους επόμενους: T, A, $A \wedge C$, $A \wedge \neg B \wedge C$, F.
- ***Συνένωση:*** Δύο ελάχιστοι/μέγιστοι όροι M_1 , M_2 συνενώνονται σε έναν ελάχιστο/μέγιστο όρο M_3 αν οι M_1 , M_2 περιέχουν όλα τα γράμματα του M_3 και ένα επιπλέον γράμμα το οποίο, στον ένα όρο είναι η άρνηση του επιπλέον γράμματος στον άλλο όρο. Κάθε γράμμα και η άρνησή του συνενώνονται στον όρο T.
  - πχ. Οι όροι $A \wedge \neg B \wedge \underline{\neg C} \wedge D$ και $A \wedge \neg B \wedge \underline{C} \wedge D$ συνενώνονται στον $A \wedge \neg B \wedge D$

Κανονικές μορφές CNF – DNF(3/2)

- ***Νέος Ορισμός DNF***: Μία πρόταση είναι σε DNF αν είναι μία διάζευξη ελαχίστων όρων κανένας από τους οποίους δεν απορροφά ή δεν συνενώνεται με κανέναν άλλο.

  - **Προτάσεις σε DNF**: $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge D)$, T, F
  - **Προτάσεις που δεν είναι σε DNF:**

    $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (B \wedge C \wedge D)$, $A \vee F$, $B \vee T$

Πλήρης αλγόριθμος μετατροπής σε CNF (1/2)

- ***Είσοδος:*** μια πρόταση του προτασιακού λογισμού με οποιαδήποτε λογικά συνδετικά ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)

Έξο

$\neg(A \wedge \ldots \wedge B) \equiv \neg A \vee \ldots \vee \neg B$

$\neg(A \vee \ldots \vee B) \equiv \neg A \wedge \ldots \wedge \neg B$

$\neg\neg A \equiv A$***δος:*** μια πρόταση σε CNF, ισοδύναμη με την αρχική

- **<u>Βήμα 1:</u>** Αντικαθιστούμε τα συνδετικά $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες:
  - $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$ και
  - $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
- **<u>Βήμα 2:</u>** Ελαχιστοποιούμε το πεδίο των αρνήσεων χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες:

Πλήρης αλγόριθμος μετατροπής σε CNF (2/2)

- **<u>Βήμα 3:</u>** Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης προς τη σύζευξη για να μετατρέψουμε συζεύξεις που βρίσκονται μέσα στο πεδίο μιας διάζευξης σε σύζευξη διαζεύξεων.
- **<u>Βήμα 4:</u>** Αφαιρούμε διπλά γράμματα από μέγιστους όρους, διπλούς μέγιστους όρους, αντικαθιστούμε ταυτολογίες με το **T** και εφαρμόζουμε απορρόφηση και συνένωση όπου είναι δυνατό.
    - Κανόνες απορρόφησης σε ταυτολογίες και αντινομίες:
    - $S \wedge \mathbf{T} \equiv S$
    - $S \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
    - $S \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$
    - $S \vee \mathbf{F} \equiv S$

Τέλος Φροντιστηρίου

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης