



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

# Λογική

## Φροντιστήριο 4: Μορφολογική Παραγωγή

Δημήτρης Πλεξουσάκης  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης Creative Commons και ειδικότερα

***Αναφορά – Μη εμπορική Χρήση – Όχι Παράγωγο Έργο v. 4.0***  
***(Attribution – Non Commercial – Non-derivatives )***



- Εξαιρείται από την ως άνω άδεια υλικό που περιλαμβάνεται στις διαφάνειες του μαθήματος, και υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης. Η άδεια χρήσης στην οποία υπόκειται το υλικό αυτό αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Συστήματα Αποδείξεων στον ΠΛ(1/2)

- Συχνά μας ενδιαφέρει να μπορούμε να διαπιστώσουμε αν μία εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.
  - *Υπενθυμίζοντας τον ορισμό:* Η εξαγωγή συμπεράσματος  $p_1, p_2, \dots, p_n / c$  είναι έγκυρη εφόσον δεν είναι δυνατόν για τις  $p_1, p_2, \dots, p_n$  να είναι συγχρόνως αληθείς και η  $c$  να είναι ψευδής.
  - Με βάση τον παραπάνω ορισμό προτείνουμε τον απλό αλγόριθμο απόδειξης εγκυρότητας, ο οποίος χρησιμοποιεί πίνακες αληθείας.
  - Ελέγχουμε αν υπάρχουν ερμηνείες που ικανοποιούν τις υποθέσεις και δεν ικανοποιούν το συμπέρασμα

# Συστήματα Αποδείξεων στον ΠΛ(2/2)

- Τα συστήματα αποδείξεων του Π.Λ. κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες:
  - *Παραγωγικά συστήματα (deduction systems)*: χρήση ενός συνόλου κανόνων λογισμού για την απόδειξη της εγκυρότητας μιας εξαγωγής συμπεράσματος (Μορφολογική Παραγωγή)
  - *Συστήματα Ανασκευής (refutation systems)*: σχέση μεταξύ εγκυρότητας και μη-ικανοποιησιμότητας (Κατασκευή Μοντέλων, Μέθοδος Επίλυσης).

# Μορφολογική Παραγωγή

- Η απόδειξη εγκυρότητας γίνεται με τη μορφή παραγωγής του συμπεράσματος από ένα σύνολο υποθέσεων
- Χρήση κανόνων *εισαγωγής* και *απαλοιφής* συνδετικών οι οποίοι ορίζουν ότι εάν έχουμε εξασφαλίσει τις απαραίτητες υποθέσεις του κανόνα σε προηγούμενα βήματα, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει και το συμπέρασμα του κανόνα στα επόμενα βήματα της απόδειξης.

# Μορφολογική Παραγωγή – Κανόνες(1/4)

- Οι απλοί κανόνες είναι αυτοί που δεν κάνουν χρήση υποπαραγωγής για τους οποίους αρκεί σε προηγούμενα βήματα να έχουμε αποδείξει το πρώτο μέλος (πάνω από τη γραμμή) για να μπορέσουμε να συμπεράνουμε το δεύτερο.

- Εισαγωγή σύζευξης: 
$$\frac{A}{B}$$
$$\frac{A \wedge B}{A \wedge B}$$

- Απαλοιφή σύζευξης: 
$$\frac{A \wedge B}{A} \text{ και } \frac{A \wedge B}{B}$$

$$\frac{A \rightarrow B}{A}$$
$$\frac{A}{B}$$

- Απαλοιφή συνεπαγωγής: 
$$\frac{A}{A \vee B}$$

# Μορφολογική Παραγωγή – Κανόνες(2/4)

• Εισαγωγή διάζευξης αριστερά: 
$$\frac{B}{A \vee B}$$

• Απαλοιφή ισοδυναμίας αριστερά: 
$$\frac{A \leftrightarrow B}{\frac{A}{B}}$$

• Απαλοιφή ισοδυναμίας δεξιά: 
$$\frac{A \leftrightarrow B}{\frac{B}{A}}$$

• Απαλοιφή άρνησης: 
$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

• Επανάληψη: 
$$\frac{A}{A}$$

• Απαλοιφή άρνησης 2: 
$$\frac{A \vee B}{\frac{\neg A}{B}}$$



# Μορφολογική Παραγωγή – Κανόνες(3/4)

- Οι επόμενοι είναι πιο πολύπλοκοι κανόνες και κάνουν χρήση υποπαραγωγής (μίας εσωτερικής διαδικασίας παραγωγής η οποία περιέχει **ΜΙΑ** υπόθεση και με τη χρήση των κανόνων καταλήγει σε ένα συμπέρασμα. Το συμπέρασμα αυτό βγαίνει έξω από την υποπαραγωγή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αμέσως επόμενη εξωτερική παραγωγή)

- Εισαγωγή συνεπαγωγής: 
$$\frac{\frac{A}{B}}{A \rightarrow B}$$

$$\frac{A \vee B}{\frac{\frac{A}{B}}{C} C}$$

1)

...
i) Υποπαραγωγή
i.1) A
(Υποθ. Υποπαρ)
...
i.n) B
i+1) A → B
...

- Απαλοιφή διάζευξης:

# Μορφολογική Παραγωγή – Κανόνες(4/4)

• Εισαγωγή ισοδυναμίας: 
$$\frac{\frac{A \ B}{B \ A}}{A \leftrightarrow B}$$

1)  
 i) Υποπαραγωγή  
     i.1) A (Υπόθ. Υποπαρ)  
     i.η) B  
 i+1) Υποπαραγωγή  
     i+1.1) B (Υπόθ. Υποπαρ)  
     i+1.η) A  
 i+2) A ↔ B  
 ...

$$\frac{\frac{A}{B} \neg B}{\neg A}$$

- Εισαγωγή Άρνησης:  
 (ή απαγωγή σε άτοπο)

...  
 i) Υποπαραγωγή  
     i.1) A (Υπόθ. Υποπαρ)  
 ...  
     i.j) B  
     i.j+1) ¬ B  
 i+1) ¬ A  
 ...

# Γενικές παρατηρήσεις(1/3)

- Αν το συμπέρασμα περιέχει το συνδετικό \*, τότε επιχειρούμε να εφαρμόσουμε τον **κανόνα εισαγωγής του \***.
- Αν μια υπόθεση περιέχει το συνδετικό \*, τότε επιχειρούμε να εφαρμόσουμε τον **κανόνα απαλοιφής του \***.
- Αν τα παραπάνω αποτύχουν, μπορούμε να δοκιμάσουμε την **εισαγωγή άρνησης** με την προϋπόθεση ότι έχουμε δημιουργήσει υποπαραγωγή με υπόθεση την άρνηση του συμπεράσματος.
- Όταν ζητείται να αποδείξουμε ένα **θεώρημα**, ξεκινάμε απευθείας μια υποπαραγωγή χωρίς προηγούμενες υποθέσεις.
- Όταν ζητείται να αποδείξουμε ότι μια εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη χρησιμοποιούμε τις υποθέσεις της εξαγωγής αυτής ως υποθέσεις της μορφολογικής παραγωγής.

# Γενικές παρατηρήσεις(2/3)

- Σε κάθε υποπαραγωγή μπορούμε να κάνουμε **μία μόνο υπόθεση**.
- Όταν σε μια υποπαραγωγή κάνουμε μια υπόθεση, αυτή είναι αυθαίρετη με την έννοια ότι δεν πάμε να αποδείξουμε ότι ισχύει πάντα. Γι' αυτό και η υπόθεση αυτή αφορά **τη συγκεκριμένη υποπαραγωγή και όσες υποπαραγωγές περιέχονται σε αυτή**, αλλά δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εξωτερικές υποπαραγωγές/παραγωγές.
- Όταν κάνουμε υποπαραγωγές, μετά την ολοκλήρωση τους θα πρέπει να ακολουθεί ο κανόνας για την εφαρμογή του οποίου τις δημιουργήσαμε (εισαγωγή συνεπαγωγής, απαλοιφή διάζευξης, εισαγωγή άρνησης).

# Γενικές παρατηρήσεις(3/3)

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια πρόταση  $\phi$  (υπόθεση ή συμπέρασμα) σε ένα σημείο της παραγωγής εάν η πρόταση εμφανίζεται **πριν** το σημείο αυτό και αν η τυχόν υποπαραγωγή στην οποία ανήκει **δεν** έχει ολοκληρωθεί ακόμα:
  - Συνεπώς, στην απαλοιφή διάζευξης, στις δυο υποπαραγωγές που δημιουργούμε, δε μπορεί η υπόθεση της μίας να χρησιμοποιηθεί στην άλλη.
  - Ομοίως, στην επανάληψη, η πρόταση που επαναλαμβάνουμε πρέπει να ανήκει σε παραγωγή ή υποπαραγωγή η οποία δεν έχει ολοκληρωθεί ακόμα. Δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε με επανάληψη το συμπέρασμα υποπαραγωγής που έχει ολοκληρωθεί.

# Τέλος Φροντιστηρίου



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ