



---

# Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

Ασκήσεις 5ου Φροντιστηρίου:  
Προτασιακός Λογισμός: Μορφολογική  
Παραγωγή

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

---

## Άδειες Χρήσης

1. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης **Creative Commons** και ειδικότερα

*Αναφορά – Μη εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 3.0 Ελλάδα  
(Attribution – Non Commercial – ShareAlike 3. Greece)*

### CC BY-NC-SA 3.0 GR

2. Εξαιρείται από την ως άνω άδεια υλικό που περιλαμβάνεται στις διαφάνειες του μαθήματος, και υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης. Η άδεια χρήσης στην οποία υπόκειται το υλικό αυτό αναφέρεται ρητώς.

## Χρηματοδότηση

1. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
2. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
3. Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αποδείξτε με χρήση της μορφολογικής παραγωγής την εγκυρότητα των ακόλουθων εξαγωγών συμπερασμάτων ή θεωρημάτων:

$$\text{A) } \{ \neg P \} / \neg(P \wedge Q)$$

$$\text{B) } / (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \text{ (Θεώρημα)}$$

$$\text{Γ) } \{ P \rightarrow Q \vee R, Q \rightarrow S, R \rightarrow S \} / P \rightarrow S$$

$$\text{Δ) } \{ P \rightarrow Q, R \vee S, P \wedge S \rightarrow U, R \rightarrow \neg(Q \wedge T) \} / P \wedge (\neg T \rightarrow U) \rightarrow U$$

$$\text{E) } / (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P) \text{ (Θεώρημα)}$$

$$\text{A) } \{ \neg P \} / \neg(P \wedge Q)$$

$$(1) \neg P \quad (\text{Υπόθεση})$$

(2) Υποπαραγωγή

(2.1)  $P \wedge Q$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(2.2)  $P$  (Από (2.1) με απαλοιφή  $\wedge$ )

(2.3)  $\neg P$  (Από (1) με επανάληψη)

(3)  $\neg(P \wedge Q)$

**B)  $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$**

(1) Υποπαραγωγή

(1.1)  $Q \rightarrow R$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(1.2) Υποπαραγωγή

(1.2.1)  $P \rightarrow Q$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(1.2.2) Υποπαραγωγή

(1.2.2.1)  $P$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(1.2.2.2)  $P \rightarrow Q$  (Από (1.2.1) με επανάληψη)

(1.2.2.3) Q (Από (1.2.2.1), (1.2.2.2) με απαλοιφή  $\rightarrow$ )

(1.2.2.4)  $Q \rightarrow R$  (Από (1.1) με επανάληψη)

(1.2.2.5) R (Από (1.2.3), (1.2.4) με απαλοιφή  $\rightarrow$ )

(1.2.3)  $P \rightarrow R$  (Από (1.2.2) με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

(1.3)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$  (Από (1.2) με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

(2)  $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

**Γ)  $\{ P \rightarrow Q \vee R, Q \rightarrow S, R \rightarrow S \} / P \rightarrow S$**

(1)  $P \rightarrow Q \vee R$  (Υπόθεση Παραγωγής)

(2)  $Q \rightarrow S$  (Υπόθεση Παραγωγής)

(3)  $R \rightarrow S$  (Υπόθεση Παραγωγής)

(4) Υποπαραγωγή

(4.1) P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(4.2)  $P \rightarrow Q \vee R$  (Από (1) με επανάληψη)

(4.3)  $Q \vee R$  (Από (4.1), (4.2) με απαλοιφή  $\rightarrow$ )

(4.4) Υποπαραγωγή

(4.4.1) Q (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(4.4.2)  $Q \rightarrow S$  (Από (2) με επανάληψη)

(4.4.3) S (Από (4.4.1), (4.4.2) με απαλοιφή  $\rightarrow$ )

(4.5) Υποπαραγωγή

(4.5.1) R (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(4.5.2)  $R \rightarrow S$  (Από (3) με επανάληψη)

(4.5.3) S (Από (4.5.1), (4.5.2) με απαλοιφή  $\rightarrow$ )

(4.6) S (Από (4.3), (4.4), (4.5) με απαλοιφή  $\vee$ )

(5)  $P \rightarrow S$  (Από (4) με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

$\Delta$  {  $P \rightarrow Q$ ,  $R \vee S$ ,  $P \wedge S \rightarrow U$ ,  $R \rightarrow \neg(Q \wedge T)$  } /  $P \wedge (\neg T \rightarrow U) \rightarrow U$

(1)  $P \rightarrow Q$  (Υπόθεση)

(2)  $R \vee S$  (Υπόθεση)

(3)  $P \wedge S \rightarrow U$  (Υπόθεση)

(4)  $R \rightarrow \neg(Q \wedge T)$  (Υπόθεση)

(5) Υποπαραγωγή

(5.1)  $P \wedge (\neg T \rightarrow U)$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(5.2) P (Από 5.1 με απαλοιφή  $\wedge$ )

(5.3)  $\neg T \rightarrow U$  (Από 5.1 με απαλοιφή  $\wedge$ )

(5.4)  $P \rightarrow Q$  (Από (1) με Επανάληψη)

(5.5) Q ((5.2) (5.4) με απαλοιφή  $\wedge$ )

- (5.6) RVS (Από (2) με επανάληψη)
- (5.7) Υποπαραγωγή  
 (5.7.1) R (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
- (5.7.2)  $R \rightarrow \neg(Q \wedge T)$  (Από (4) με επανάληψη)
- (5.7.3)  $\neg(Q \wedge T)$  (Από (5.7.1), (5.7.2) με απαλοιφή  $\rightarrow$ )
- (5.7.4) Υποπαραγωγή  
 (5.7.4.1) T (Υπόθεση Υποπαραγωγής)  
 (5.7.4.2) Q (Από (5.5) με επανάληψη)
- (5.7.4.3)  $Q \wedge T$  (Από (5.7.4.1), (5.7.4.2) με εισαγωγή  $\wedge$ )
- (5.7.4.4)  $\neg(Q \wedge T)$  (Από (5.7.3) με επανάληψη)
- (5.7.5)  $\neg T$  (Από (5.7.4) με εισαγωγή  $\neg$ )  
 (5.7.6)  $\neg T \rightarrow U$  (Από (5.3) με επανάληψη)  
 (5.7.7) U (Από (5.7.5), (5.7.6) με απαλοιφή  $\rightarrow$ )
- (5.8) Υποπαραγωγή  
 (5.8.1) S (Υπόθεση Υποπαραγωγής)  
 (5.8.2) P (Από (5.2) με επανάληψη)
- (5.8.3)  $P \wedge S$  (Από (5.8.1), (5.8.2) με εισαγωγή  $\wedge$ )
- (5.8.4)  $P \wedge S \rightarrow U$  (Από (3) και επανάληψη)
- (5.8.5) U (Από (5.7.5), (5.7.6) με απαλοιφή  $\rightarrow$ )
- (5.9) U (Από (5.6), (5.7), (5.8) με απαλοιφή  $\wedge$ )



(6)  $P \wedge (\neg T \rightarrow U) \rightarrow U$

(Από (5) Με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

**E)  $\neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$**

(1)  $Q \vee \neg Q$  (Θεώρημα)

(2) Υποπαραγωγή

(2.1)  $Q$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(2.2) Υποπαραγωγή

(2.2.1)  $P$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(2.2.2)  $Q$  (Από (2.1) με επανάληψη)

(2.3)  $P \rightarrow Q$  (Εισαγωγή συνεπαγωγής)

(2.4)  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$  (Εισαγωγή διάζευξης δεξιά)

(3) Υποπαραγωγή

(3.1)  $\neg Q$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(3.2)  $\neg Q \vee P$  (Εισαγωγή διάζευξης)

(3.3) Υποπαραγωγή

(3.3.1)  $Q$  (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(3.3.2)  $P$  (Από (3.2) και απαλοιφή άρνησης 2)

(3.4)  $Q \rightarrow P$  (Από (3.3) και εισαγωγή  $\rightarrow$ )

(3.5)  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$  (Εισαγωγή διάζευξης αριστερά)

(4)  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$  (Απαλοιφή διάζευξης από (1),(2),(3))