ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Λογική

Φροντιστήριο 8: Ακολουθίες Επίλυσης, Επίλυση για όρους Horn

Δημήτρης Πλεξουσάκης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πληρότητα της μεθόδου επίλυσης

Λήμμα: Αν κάθε μέλος ενός συνόλου όρων περιέχει ένα αρνητικό γράμμα, τότε το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

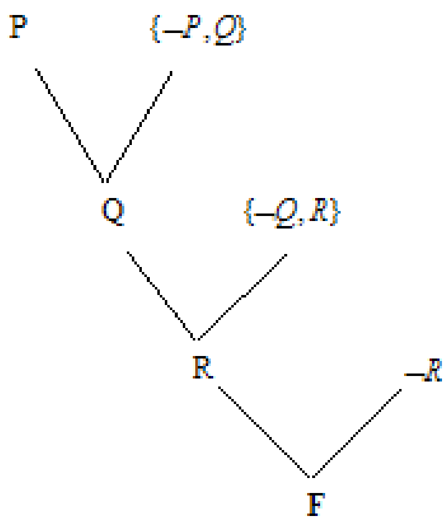
- Άρα για να είναι μη-ικανοποιήσιμο, θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα μέλος που να μην περιέχει αρνητικό γράμμα

Λήμμα: Έστω ένα σύνολο όρων S, και L κάποιο γράμμα για το οποίο (α) $S \models L$ και (β) $L \notin S$. Τότε το σύνολο $S' = \{C - \{L\} \mid C \in S\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο

- Βάσει αυτών των λημμάτων, μπορούμε να δείξουμε ότι ο αλγόριθμος που κατασκευάζει δένδρο ανασκευής από ένα μη-ικανοποιήσιμο σύνολο όρων είναι ορθός και συνεπώς η μέθοδος επίλυσης είναι πλήρης, δηλαδή **κάθε** μη-ικανοποιήσιμο σύνολο όρων έχει ένα δένδρο ανασκευής.

Ακολουθίες Επίλυσης (1)

- Μερικά δένδρα επίλυσης έχουν απλή δομή
  - π.χ. για το σύνολο όρων S={P,{¬P,Q}, {¬Q,R}, ¬R} έχουμε το εξής δέντρο:



- Παρατηρούμε ότι κάθε επίλυση γίνεται μεταξύ ενός όρου του S και ενός άλλου όρου (που μπορεί να ανήκει ή όχι στο S)
  - Ποτέ δεν έχουμε επίλυση όπου **και** οι δύο όροι έχουν προκύψει από προηγούμενες επιλύσεις
- Τέτοια δέντρα επίλυσης μπορούν να αναπαρασταθούν σε γραμμική μορφή και ονομάζονται **ακολουθίες επίλυσης**:

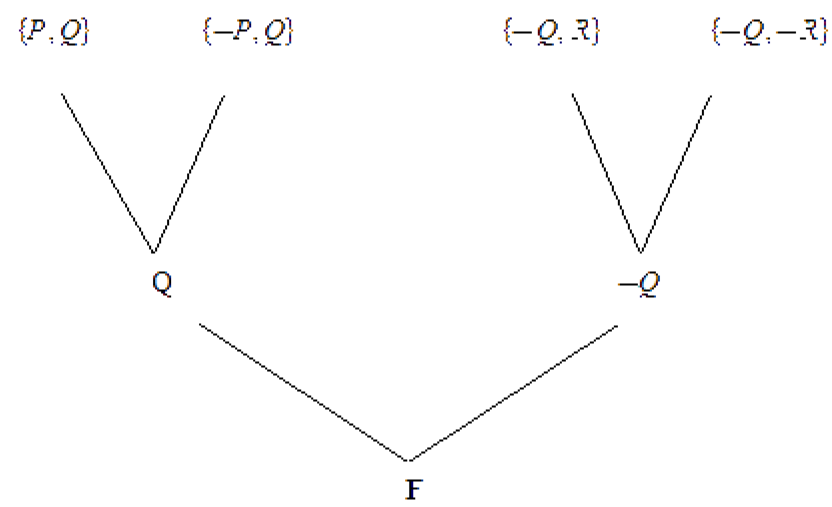
$$P \xrightarrow{\{\neg P, Q\}} Q \xrightarrow{\{\neg Q, R\}} R \xrightarrow{\neg R} F$$

Ακολουθίες Επίλυσης (2)

Ορισμός: Έστω S ένα σύνολο όρων. Μια **ακολουθία επίλυσης** του S είναι μια πεπερασμένη ακολουθία όρων $C_o, C_1, \ldots, C_n$ για την οποία (α) $C_o \in S$ και (β) για i=1,…,n, C_i είναι ο όρος επίλυσης του C_{i-1} με κάποιο μέλος του S. Αν C_n=F, τότε η ακολουθία λέγεται **ακολουθία ανασκευής.**

- Αν υπάρχει μια ακολουθία ανασκευής για ένα σύνολο S, τότε το S είναι μη-ικανοποιήσιμο

Δεν ισχύει όμως ότι αν το S είναι μη-ικανοποιήσιμο τότε δε θα έχει υποχρεωτικά μια ακολουθία ανασκευής, π.χ. για το σύνολο S={{P,Q},{¬P,Q}, {¬Q,R}, {¬Q, ¬R}}, που είναι μη-ικανοποιήσιμο, υπάρχει το διπλανό δέντρο ανασκευής αλλά δεν υπάρχει ακολουθία.



Ακολουθίες Επίλυσης (3)

Λήμμα: Αν ένα σύνολο όρων S έχει μια ακολουθία ανασκευής, τότε το S περιέχει ένα μοναδιαίο όρο.

- Αποδεικνύεται εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι κάθε ακολουθία ανασκευής τερματίζει με μια επίλυση της μορφής res (A,¬A)=F για κάποιο A. Εξ'ορισμού το A ή το ¬A πρέπει να ανήκει στο S.
- Οι ακολουθίες επίλυσης/ανασκευής είναι πιο αποδοτικές από τα αντίστοιχα δέντρα.
- Γι'αυτό επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας σε ένα υποσύνολο όρων για το οποίο η ύπαρξη ή μη-ύπαρξη μιας ακολουθίας ανασκευής είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την (μη-)ικανοποιησιμότητα του συνόλου αυτού.

Όροι Horn

Ορισμός: Ένας όρος ονομάζεται όρος Horn (Horn clause) όταν περιέχει **το πολύ ένα** θετικό γράμμα (γράμμα χωρίς άρνηση)

- π.χ. T, F, P, ¬P, {¬P, Q}, {¬P, Q, ¬R}
- αλλά όχι {P, Q}, {P, Q, ¬R}, {¬P, Q, R, ¬S}

Λήμμα: Ο όρος επίλυσης δύο όρων Horn είναι όρος Horn.

- Με την επίλυση θα διαγραφεί ένα θετικό γράμμα από τον ένα όρο και ένα αρνητικό από τον άλλο. Άρα αφού και οι δύο είναι όροι Horn, τότε ο ένας πλέον δε θα περιέχει **κανένα** θετικό γράμμα και ο άλλος παραμένει ως είχε (**το πολύ ένα** θετικό γράμμα), οπότε συνενώνοντας αυτούς τους όρους, καταλήγουμε και πάλι σε ένα σύνολο με **το πολύ ένα** θετικό γράμμα.

Επίλυση για όρους Horn (1)

- Είδαμε ότι ένα σύνολο όρων είναι μη-ικανοποιήσιμο όταν περιέχει τουλάχιστον ένα όρο χωρίς αρνητικά γράμματα
  - Για την περίπτωση όρων Horn, θα πρέπει να περιέχει είτε το **F**, είτε ένα θετικό μοναδιαίο όρο
- Επίσης είδαμε σε προηγούμενο Λήμμα ότι αν ένα σύνολο όρων έχει μια ακολουθία ανασκευής, τότε το σύνολο περιέχει ένα μοναδιαίο όρο
  - Συνεπώς, για την περίπτωση όρων Horn, αν το σύνολο είναι **μη-ικανοποιήσιμο**, τότε ο αλγόριθμος θα οδηγεί πάντα σε **ακολουθία ανασκευής** (και όχι δένδρο).
- Άρα στην περίπτωση των συνόλων όρων Horn, περιοριζόμαστε στην κατασκευή **ακολουθιών** και όχι δέντρων, χωρίς όμως να χάνουμε την πληρότητα.

Άσκηση 1

- Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο της επίλυσης για να εξετάσετε αν το παρακάτω σύνολο είναι ικανοποιήσιμο ή μη:

  $\{\neg Q \vee S,\ \neg(S \wedge P),\ (P \rightarrow Q) \wedge R,\ (P \rightarrow R) \rightarrow P,\ S \rightarrow P\}$

Αντιστοιχεί το εξής σύνολο όρων:

$\{\neg Q, S\},\quad \{\neg S, \neg P\},\quad \{\neg P, Q\},\quad R,\quad P,\quad \{P, \neg R\},\quad \{\neg S, P\}$

Παρατηρούμε ότι είναι σύνολο όρων Horn. Άρα ο αλγόριθμος θα οδηγήσει σίγουρα σε ακολουθία και όχι σε δέντρο.

Άσκηση 1

$S = \{\{\neg Q,S\}, \{\neg S,\neg P\}, \{\neg P,Q\}, R, P, \{P,\neg R\}, \{\neg S,P\}\}$

- Ας εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο:

1. Δεν υπάρχουν όροι A, ¬A για κάποιο γράμμα A
2. Υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός όρος
3. Ας επιλέξουμε C=P. i=1
4. Το ¬P δεν ανήκει στο σύνολο S
5. Για κάθε όρο K στο σύνολο S - {P}, θεωρούμε έναν όρο K΄=K - {¬P} και καταλήγουμε στο σύνολο: $S_1=\{\neg Q,S\}, \neg S, Q, R, \{P,\neg R\}, \{\neg S,P\}$
6. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο το σύνολο S_1

Άσκηση 1

$S_1=\{\{\neg Q,S\}, \neg S, Q, R, \{P,\neg R\}, \{\neg S,P\}\}$

1. Δεν υπάρχουν όροι Α, ¬Α για κάποιο γράμμα Α
2. Υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός όρος
3. Ας επιλέξουμε C΄=Q. i΄=1
4. Το ¬Q δεν ανήκει στο σύνολο S_1
5. Για κάθε όρο Κ στο σύνολο S_1 - {Q}, θεωρούμε έναν όρο Κ΄=Κ - {¬Q} και καταλήγουμε στο σύνολο: S_{11}=S, ¬S, R, {P,¬R}, {¬S,P}
6. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο το σύνολο S_{11}

Άσκηση 1

S_{11}={S, ¬S, Q, R, {P,¬R}, {¬S,P}}

$$S \xrightarrow{\neg S} F$$

$$\{\neg Q, S\} \xrightarrow{\neg S} \neg Q$$

$$\{\neg Q, S\} \xrightarrow{\neg S} \neg Q \xrightarrow{Q} F$$

$$\{\neg Q, S\} \xrightarrow{\{\neg S, \neg P\}} \{\neg Q, \neg P\} \xrightarrow{\{Q, \neg P\}} \neg P$$

$$\{\neg Q, S\} \xrightarrow{\{\neg S, \neg P\}} \{\neg Q, \neg P\} \xrightarrow{\{Q, \neg P\}} \neg P \xrightarrow{P} F$$

Άσκηση 1

Η ακολουθία ανασκευής

$$\{\neg Q, S\} \xrightarrow{\{\neg S, \neg P\}} \{\neg Q, \neg P\} \xrightarrow{\{Q, \neg P\}} \neg P \xrightarrow{P} F$$

αποδεικνύει ότι το σύνολο {{¬Q,S}, {¬S,¬P}, {¬P,Q}, P} που είναι υποσύνολο του αρχικού S είναι μη-ικανοποιήσιμο. Άρα και το S μη-ικανοποιήσιμο

Επίλυση για όρους Horn (2)

- Η ακολουθία ανασκευής στην οποία καταλήξαμε δεν είναι απαραίτητο να είναι η μοναδική
- Αν αναπαραστήσουμε όλες τις ακολουθίες που προκύπτουν από ένα σύνολο όρων Σ, ο γράφος που προκύπτει ονομάζεται **δίκτυο ανασκευής**
  - Αν ένα σύνολο όρων Horn είναι ικανοποιήσιμο, τότε το δίκτυο ανασκευής **δεν** περιέχει το **F**.
  - Άρα για να ελέγξουμε την ικανοποιησιμότητα ενός τέτοιου συνόλου, αρκεί να κατασκευάσουμε συστηματικά το δίκτυο ανασκευής και να σταματήσουμε εάν προκύψει ο όρος **F**, οπότε και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι μη-ικανοποιήσιμο. Αλλιώς είναι ικανοποιήσιμο.

Εξαγωγή συμπεράσματος από σύνολο όρων Horn

Θεώρημα: Αν S είναι ένα μη-ικανοποιήσιμο σύνολο όρων Horn και C κάποιο μέλος του S, τότε, είτε το S – {C} είναι μη-ικανοποιήσιμο είτε υπάρχει ακολουθία ανασκευής για το S η οποία ξεκινά με το C.

- Υποθέστε ότι μας δίνεται ένα ικανοποιήσιμο σύνολο όρων Horn W και μας ζητείται αν μπορούμε να συμπεράνουμε έναν άλλο όρο A (αν $W \models A$, για $A \notin W$). Αυτό θα συμβαίνει αν το σύνολο $W' = W \cup \{\neg A\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο. Εφόσον το $W' - \{\neg A\} = W$ είναι ικανοποιήσιμο, το θεώρημα λέει ότι το W΄ θα είναι μη-ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία ανασκευής που ξεκινάει με το ¬A
- Άρα όταν μας ζητείται να ελέγξουμε την εξαγωγή συμπεράσματος από ένα σύνολο όρων Horn εξετάζουμε αν υπάρχει ακολουθία ανασκευής που να ξεκινάει με την άρνηση του συμπεράσματος

Άσκηση 2

- Έστω το εξής ικανοποιήσιμο σύνολο όρων Horn:

  W = {{T,¬P,¬R}, Q, {R, ¬Q}, {P,¬Q}}

Αποφασίστε εάν ισχύει ότι W ⊨ T.

Αρκεί να βρούμε μια ακολουθία ανασκευής που να ξεκινάει από το ¬T.

$$\neg T \xrightarrow{\{T,\neg P,\neg R\}} \{\neg P, \neg R\} \xrightarrow{\{P,\neg Q\}} \{\neg R, \neg Q\} \xrightarrow{\{R,\neg Q\}} \neg Q \xrightarrow{Q} F$$

Άρα το W ∪{¬T} είναι μη-ικανοποιήσιμο, οπότε W ⊨ T.

Άσκηση 3

- Έστω το εξής ικανοποιήσιμο σύνολο όρων Horn:

  W = {{¬P,¬R, S}, {¬P,¬Q, T}, {¬Q, R}, {¬S, U}, {¬T, U}}

Αποφασίστε εάν ισχύει ότι W ╞ U.

Αρκεί να βρούμε μια ακολουθία ανασκευής που να ξεκινάει από το ¬U.

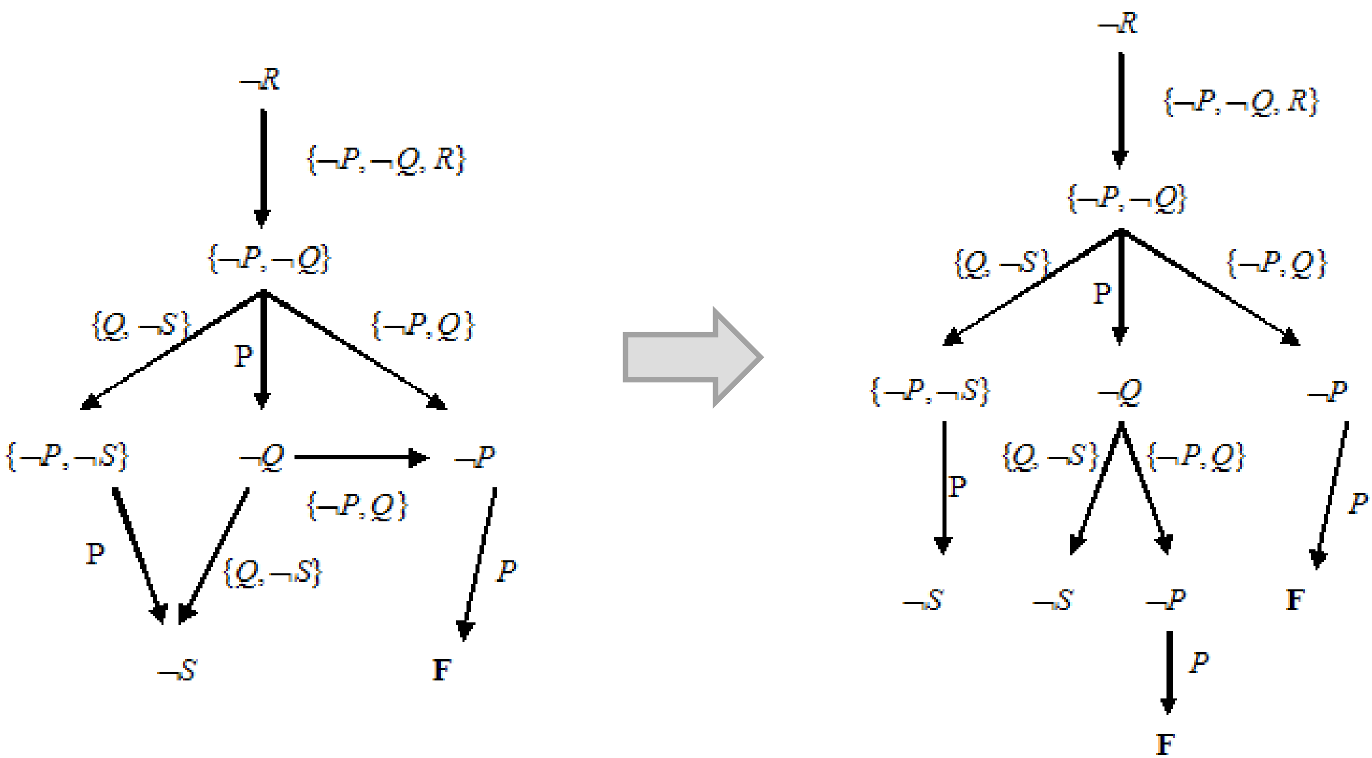
$$\neg U \xrightarrow{\{\neg S, U\}} \neg S \xrightarrow{\{\neg P, \neg R, S\}} \{\neg P, \neg R\} \xrightarrow{\{\neg Q, R\}} \{\neg P, \neg Q\}$$

$$\neg U \xrightarrow{\{\neg T, U\}} \neg T \xrightarrow{\{\neg P, \neg Q, T\}} \{\neg P, \neg Q\}$$

Έχοντας εξαντλήσει όλες τις δυνατές ακολουθίες ξεκινώντας από το ¬U, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία ανασκευής. Άρα το W ∪{¬U} είναι ικανοποιήσιμο, οπότε W⊭U.

Συστηματική παραγωγή δικτύων ανασκευής (1)

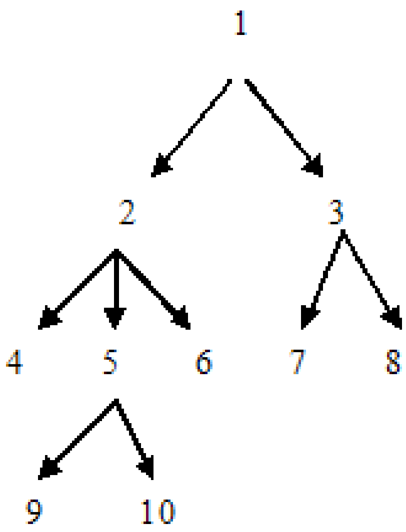
- Μας ενδιαφέρει να παράγουμε δίκτυα ανασκευής με συστηματικό τρόπο. Αυτό μπορεί να γίνει αν τα δίκτυα μετατραπούν σε δέντρα.
  - Αυτό γίνεται με την αντικατάσταση ακμών που συγκλίνουν με παράλληλες ακμές



Συστηματική παραγωγή δικτύων ανασκευής (2)

- Χρησιμοποιούμε την εξής σύμβαση: αν δύο ή περισσότερα κλαδιά ξεκινούν από τον ίδιο κόμβο τότε γράφονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με τη σειρά που οι ετικέτες τους εμφανίζονται στο αρχικό σύνολο

- Για να αναζητήσουμε στο δέντρο (π.χ. ώστε να ελέγξουμε αν υπάρχει F), συνήθως χρησιμοποιούμε διάσχιση προδιάταξης (pre-order traversal): ξεκινώντας από τη ρίζα ακολουθούμε πάντα το αριστερό κλαδί. Όταν συναντήσουμε ένα φύλλο, επιστρέφουμε στην προηγούμενη διακλάδωση και εξερευνούμε το αριστερότερο ανεξερεύνητο κλαδί.
- Για παράδειγμα στο δένδρο δεξιά, η διάσχιση θα γίνει με τη σειρά 1,2,4,5,9,10,6,3,7,8
- Με την ίδια στρατηγική μπορούμε να κατασκευάσουμε συστηματικά το δένδρο
- Η σειρά με την οποία μας δίνονται οι όροι επηρεάζει άμεσα τη μορφή του δένδρου



Λογικός Προγραμματισμός (1)

- Στο λογικό προγραμματισμό, οι όροι Horn ερμηνεύονται ως δεδομένα (facts), κανόνες(rules) και ερωτήσεις(queries)
  - Οι μοναδιαίοι θετικοί όροι είναι δεδομένα
    - Π.χ. ο όρος P είναι δεδομένο (γνωρίζω ότι το P είναι αληθές)
  - Οι μοναδιαίοι αρνητικοί όροι είναι ερωτήσεις
    - Π.χ. ο όρος ¬P είναι ερώτηση (είναι το P αληθές;)
  - Όλοι οι υπόλοιποι είναι κανόνες
    - Η γενική μορφή $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A$ μετασχηματίζεται σε $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$ που μπορεί να γραφεί και ως $A \leftarrow A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ (το A είναι αληθές, αν τα $A_1 \ldots A_n$ είναι αληθή)

Λογικός Προγραμματισμός (2)

Ας θεωρήσουμε τις εξής προτάσεις:

1. «αν βρέξει, ο αγώνας θα αναβληθεί»
2. «αν ο αγώνας θα αναβληθεί, θα πάμε στο πάρτυ»
3. «αν πάμε στο πάρτυ και βρέχει, θα πάρουμε το λεωφορείο»
4. «αν πάρουμε το λεωφορείο, θα χρειαστούμε χρήματα»
5. «θα βρέξει»

Μπορούμε να συμπεράνουμε την πρόταση «θα χρειαστούμε χρήματα»;

Για να γράψουμε τις προτάσεις σε μορφή κατάλληλη για το Λογικό Προγραμματισμό, ορίζουμε τα παρακάτω προτασιακά γράμματα:

- **P**: «θα βρέξει»
- **Q**: «ο αγώνας θα αναβληθεί»
- **R**: «θα πάμε στο πάρτυ»
- **S**: «θα πάρουμε το λεωφορείο»
- **V**: «θα χρειαστούμε χρήματα»

Λογικός Προγραμματισμός (3)

Με τα προτασιακά αυτά γράμματα οι προτάσεις ξαναγράφονται ως εξής:

1. Q ← P
2. R ← Q
3. S ← Q, P
4. V ← S
5. P

P: «θα βρέξει»
Q: «ο αγώνας θα αναβληθεί»
R: «θα πάμε στο πάρτυ»
S: «θα πάρουμε το λεωφορείο»
V: «θα χρειαστούμε χρήματα»

(Χρησιμοποιούμε το κόμμα για να διαχωρίσουμε πολλαπλούς όρους στις προϋποθέσεις ενός κανόνα)

Η ερώτηση αν μπορούμε να συμπεράνουμε την πρόταση «θα χρειαστούμε χρήματα», εκφράζεται ως ¬V.

Εφαρμόζοντας επίλυση, αρκεί να βρούμε μια ακολουθία ανασκευής που να ξεκινάει από το ¬V.

Αυτό μπορεί να γίνει αυτόματα, εκφράζοντας τις προτάσεις σε μια γλώσσα λογικού προγραμματισμού και τρέχοντας έναν interpreter της γλώσσας.

Τέλος Φροντιστηρίου

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ