



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Αρχεία και Βάσεις Δεδομένων

Διάλεξη 12η: Συναρτησιακές Εξαρτήσεις -
Αξιώματα Armstrong

Δημήτρης Πλεξουσάκης

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- Μια **συναρτησιακή εξάρτηση** (Functional Dependency) είναι ένας περιορισμός μεταξύ δύο συνόλων γνωρισμάτων.
 - Έστω A_1, A_2, \dots, A_n όλα τα γνωρίσματα μιας σχέσης R . Αν X και Y είναι υποσύνολα του $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, τότε η συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ καθορίζει ότι για οποιεσδήποτε δύο πλειάδες t_1, t_2 της R , αν $t_1[X] = t_2[X]$, τότε πρέπει επίσης να ισχύει ότι $t_1[Y] = t_2[Y]$.
- Δεδομένης μιας συναρτησιακής εξάρτησης $X \rightarrow Y$, λέμε ότι το σύνολο X **προσδιορίζει συναρτησιακά** το σύνολο Y ή ότι το σύνολο Y **εξαρτάται συναρτησιακά** από το σύνολο X

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- Αν η συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ ισχύει σε μια σχέση R , τότε δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν πλειάδες οι οποίες συμφωνούν στις τιμές όλων των γνωρισμάτων στο X και συγχρόνως δε συμφωνούν στην τιμή κάποιου από τα γνωρίσματα του Y .
- Αν το X είναι κλειδί της R , τότε η εξάρτηση $X \rightarrow Y$ ισχύει για κάθε υποσύνολο Y των γνωρισμάτων της R .
- Η εξάρτηση $X \rightarrow Y$ δε συνεπάγεται την εξάρτηση $Y \rightarrow X$

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- **Παράδειγμα:** Έστω ότι οι παρακάτω σχέσεις έχουν το περιεχόμενο που φαίνεται στους αντίστοιχους πίνακες. Προσδιορίστε τις συναρτησιακές εξαρτήσεις οι οποίες ισχύουν.

T1

A	B
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_1
x_4	y_1
x_5	y_2
x_6	y_2

$$\begin{aligned} \text{T1: } & A \rightarrow B \\ & B \nrightarrow A \end{aligned}$$

T2

A	B
x_1	y_1
x_2	y_4
x_1	y_1
x_3	y_2
x_2	y_4
x_4	y_3

$$\begin{aligned} \text{T2: } & A \rightarrow B \\ & B \rightarrow A \end{aligned}$$

T3

A	B
x_1	y_1
x_2	y_4
x_1	y_1
x_3	y_2
x_2	y_4
x_4	y_4

$$\begin{aligned} \text{T3: } & A \rightarrow B \\ & B \nrightarrow A \end{aligned}$$

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- **Παράδειγμα:** Έστω το σχήμα
EMPLOYEE (*emp_id*, *emp_name*, *emp_phone*, *dept_name*)
DEPARTMENT (*dept_id*, *dept_name*, *dept_phone*, *dept_mgrname*)
SKILL (*skill_id*, *skill_name*)
EMP_HAS_SKILL (*emp_id*, *skill_id*, *skill_date*, *skill_level*)
- Οι συναρτησιακές εξαρτήσεις που ισχύουν είναι:
 1. *emp_id* → *emp_name*, *emp_phone*, *dept_name*
 2. *dept_name* → *dept_phone*, *dept_mgrname*
 3. *skill_id* → *skill_name*
 4. *emp_id*, *skill_id* → *skill_date*, *skill_level*

Λογικές Συνέπειες Συναρτησιακών Εξαρτήσεων

- **Κανόνας Εγκλεισμού** (Inclusion Rule): Αν X, Y είναι σύνολα γνωρισμάτων από τη σχήμα της σχέσης R και $Y \subseteq X$, τότε $X \rightarrow Y$.
- Μια συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ λέγεται **τετριμμένη** αν ισχύει για κάθε σχέση R της οποίας το σχήμα περιέχει X και Y
- Τετριμμένες εξαρτήσεις εμφανίζονται σαν αποτέλεσμα της εφαρμογής του κανόνα εγκλεισμού
- **Θεώρημα:** Αν $X \rightarrow Y$ είναι τετριμμένη συναρτησιακή εξάρτηση, πρέπει να ισχύει ότι $Y \subseteq X$

Λογικές Συνέπειες Συναρτησιακών Εξαρτήσεων

- **Θεώρημα:** Αν $X \rightarrow Y$ είναι τετριμμένη συναρτησιακή εξάρτηση, πρέπει να ισχύει ότι $Y \subseteq X$
- **Απόδειξη:** Υποθέστε ότι $Y \supset X$. Δημιουργήστε μια σχέση με όλα τα γνωρίσματα των X και Y και θεωρήστε ένα γνώρισμα A του $Y - X$. Εφόσον $A \in Y$ και $A \notin X$, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε δύο πλειάδες u και v , οι οποίες έχουν κοινές τιμές σε όλα τα γνωρίσματα στο X αλλά έχουν διαφορετικές τιμές στο A . Τότε όμως η τετριμμένη εξάρτηση δεν ισχύει. Άρα, δε μπορεί να υπάρχει τέτοιο γνώρισμα A στο $Y - X$. Επομένως, $Y \subseteq X$.
- Από ένα μικρό αριθμό κανόνων συνεπαγωγής και ένα αρχικό σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων μπορεί να εξαχθεί ένας αριθμός πρόσθετων συναρτησιακών εξαρτήσεων.

Αξιώματα Armstrong

➤ Έστω ότι τα σύνολα γνωρισμάτων X, Y, Z περιέχονται στο σχήμα της σχέσης R . Τότε ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:

1. **Κανόνας Εγκλεισμού (Inclusion Rule)**

Αν $Y \subseteq X$ τότε $X \rightarrow Y$

2. **Κανόνας Μεταβατικότητας (Transitivity Rule)**

Αν $X \rightarrow Y$ και $Y \rightarrow Z$ τότε $X \rightarrow Z$

3. **Κανόνας Επαύξησης (Augmentation Rule)**

Αν $X \rightarrow Y$ τότε $XZ \rightarrow YZ$

Συνέπειες των Αξιωμάτων

➤ Θεώρημα: Αν W, X, Y, Z, B περιέχονται στο σχήμα της R , τότε:

1. **Κανόνας Ένωσης (Union Rule)**

Αν $X \rightarrow Y$ και $X \rightarrow Z$ τότε $X \rightarrow YZ$

2. **Κανόνας Αποσύνθεσης (Decomposition Rule)**

Αν $X \rightarrow YZ$ τότε $X \rightarrow Y$ και $X \rightarrow Z$

3. **Κανόνας Ψευδομεταβατικότητας (Pseudotransitivity Rule)**

Αν $X \rightarrow Y$ και $WY \rightarrow Z$ τότε $XW \rightarrow Z$

4. **Κανόνας Συσσώρευσης (Accumulation Rule)**

Αν $X \rightarrow YZ$ και $Z \rightarrow B$ τότε $X \rightarrow YZB$

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

	A	B	C	D
Τ	a_1	b_1	c_1	d_1
	a_1	b_1	c_2	d_2
	a_2	b_1	c_1	d_3
	a_2	b_1	c_3	d_4

1. Σ.Ε. με ένα γνώρισμα στο αριστερό μέλος
 - Οι τετριμμένες εξαρτήσεις $A \rightarrow A, B \rightarrow B, C \rightarrow C, D \rightarrow D$ δεν περιλαμβάνονται στο ελάχιστο σύνολο.
 - Οι εξαρτήσεις $A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow B$ προκύπτουν από τον πίνακα καθώς όλες οι τιμές του B είναι ίδιες.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

	A	B	C	D
Τ	a_1	b_1	c_1	d_1
	a_1	b_1	c_2	d_2
	a_2	b_1	c_1	d_3
	a_2	b_1	c_3	d_4

1. Σ.Ε. με ένα γνώρισμα στο αριστερό μέλος
 - Τα γνωρίσματα A, C, D έχουν τουλάχιστον δύο διακεκριμένες τιμές. Άρα, $B \twoheadrightarrow A, B \twoheadrightarrow C, B \twoheadrightarrow D$.
 - Όλες οι τιμές του D είναι διαφορετικές Άρα, $D \rightarrow A, D \rightarrow B, D \rightarrow C$.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

	A	B	C	D
Τ	a_1	b_1	c_1	d_1
	a_1	b_1	c_2	d_2
	a_2	b_1	c_1	d_3
	a_2	b_1	c_3	d_4

1. Σ.Ε. με ένα γνώρισμα στο αριστερό μέλος
 - Τα γνωρίσματα A, B, C έχουν τουλάχιστον δύο επαναλαμβανόμενες τιμές. Άρα, $A \twoheadrightarrow D$, $B \twoheadrightarrow D$, $C \twoheadrightarrow D$.
 - $A \twoheadrightarrow C$ και $C \twoheadrightarrow A$, εξαιτίας των πλειάδων 1,2 και 1,3 αντίστοιχα.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

	A	B	C	D
Τ	a_1	b_1	c_1	d_1
	a_1	b_1	c_2	d_2
	a_2	b_1	c_1	d_3
	a_2	b_1	c_3	d_4

1. Σ.Ε. με ένα γνώρισμα στο αριστερό μέλος
 - Άρα ισχύουν οι ακόλουθες Σ.Ε.:
 $A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow A, D \rightarrow B, D \rightarrow C$
 - Από τον κανόνα ένωσης: $A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow ABC$.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

	A	B	C	D
T	a_1	b_1	c_1	d_1
	a_1	b_1	c_2	d_2
	a_2	b_1	c_1	d_3
	a_2	b_1	c_3	d_4

2. Σ.Ε. με ζεύγος γνωρισμάτων στο αριστερό μέλος
- Εξαιτίας της $D \rightarrow ABC$, κάθε ζεύγος που περιέχει το D προσδιορίζει συναρτησιακά όλα τα υπόλοιπα γνωρίσματα (κανόνας επαύξεσης). Αυτές οι εξαρτήσεις είναι συνεπαγωγές εξαρτήσεων που ήδη ανήκουν στο ζητούμενο σύνολο.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

	A	B	C	D
Τ	a_1	b_1	c_1	d_1
	a_1	b_1	c_2	d_2
	a_2	b_1	c_1	d_3
	a_2	b_1	c_3	d_4

2. Σ.Ε. με ζεύγος γνωρισμάτων στο αριστερό μέλος
 - Ζεύγη γνωρισμάτων που περιλαμβάνουν το B στο αριστερό μέλος δίνουν είτε τετριμμένες εξαρτήσεις, είτε συνεπαγωγές εξαρτήσεις.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

	A	B	C	D
Τ	a_1	b_1	c_1	d_1
	a_1	b_1	c_2	d_2
	a_2	b_1	c_1	d_3
	a_2	b_1	c_3	d_4

2. Σ.Ε. με ζεύγος γνωρισμάτων στο αριστερό μέλος
- $AC \rightarrow ABCD$ καθώς το ζεύγος AC έχει διακεκριμένες τιμές σε κάθε πλειάδα. Η μόνη νέα εξάρτηση είναι η $AC \rightarrow D$. Οι εξαρτήσεις $AC \rightarrow A$, $AC \rightarrow C$, $AC \rightarrow B$ ήδη εξάγονται από άλλες εξαρτήσεις.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

	A	B	C	D
Τ	a_1	b_1	c_1	d_1
	a_1	b_1	c_2	d_2
	a_2	b_1	c_1	d_3
	a_2	b_1	c_3	d_4

3. Δεν υπάρχουν εξαρτήσεις με 3 ή 4 γνωρίσματα στο αριστερό μέλος οι οποίες ανήκουν σε αυτό το σύνολο.

Το ελάχιστο σύνολο εξαρτήσεων είναι

$$\{A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow ABC, AC \rightarrow D\}$$

Κλείσιμο (Closure)

- Τα αξιώματα Armstrong και οι συνέπειές τους παράγουν ένα σύνολο το οποίο είναι πολύ μεγαλύτερο από το αρχικό σύνολο των ΣΕ.
- Δεδομένου ενός συνόλου F από ΣΕ, το **κλείσιμο** (closure) F^+ του F ορίζεται σαν το σύνολο των ΣΕ οι οποίες συνεπάγονται από το F .
- **Παράδειγμα:** Θεωρήστε το σύνολο των ΣΕ:

$$F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow E, E \rightarrow F, F \rightarrow G, G \rightarrow H\}$$
 - ✓ Από $A \rightarrow B$ και $B \rightarrow C$, συνεπάγεται λόγω μεταβατικότητας η $A \rightarrow C$.
 - ✓ Επίσης: $A \rightarrow D, A \rightarrow E, A \rightarrow F, A \rightarrow G, A \rightarrow BC, A \rightarrow EF$ κ.ο.κ.
 - ✓ Παρόμοια για εξαρτήσεις με B στο αριστερό μέλος κ.ο.κ.

Κάλυψη (Cover)

- Το μέγεθος του κλεισίματος ενός συνόλου ΣΕ μεγαλώνει εκθετικά με αυτό του αρχικού συνόλου.
- Χρειαζόμαστε έναν τρόπο για να αναφερόμαστε στο σύνολο των εξαρτήσεων που συνεπάγονται από ένα αρχικό σύνολο χωρίς να πρέπει να υπολογίσουμε το κλείσιμο του συνόλου αυτού.
- Για κάθε σύνολο ΣΕ μπορούμε να βρούμε ένα «ισοδύναμο» σύνολο το οποίο είναι ελάχιστο.
- Ένα σύνολο F από ΣΕ για μια σχέση R **καλύπτει** ένα άλλο σύνολο G από ΣΕ για την R, αν το σύνολο G μπορεί να εξαχθεί με την εφαρμογή των κανόνων συνεπαγωγής στις ΣΕ του F, δηλαδή αν $G \subseteq F^+$.

Κάλυψη (Cover)

➤ Αν το F καλύπτει το G και το G καλύπτει το F τότε τα F και G λέγονται **ισοδύναμα** ($F \equiv G$).

➤ Αν $F \equiv G$, τότε $F^+ = G^+$

➤ **Παράδειγμα:** Θεωρήστε τα σύνολα ΣΕ

$$F = \{B \rightarrow CD, AD \rightarrow E, B \rightarrow A\}$$

$$G = \{B \rightarrow CDE, B \rightarrow ABC, AD \rightarrow E\}$$

Δείξτε ότι το F καλύπτει το G .

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ΣΕ του G μπορεί να εξαχθεί από το F με χρήση των κανόνων συνεπαγωγής.

- Η ΣΕ $AD \rightarrow E$ είναι ήδη στο F .
- Από την $B \rightarrow CD$ και την $B \rightarrow A$, εξαγάγουμε την $B \rightarrow ACD$ (κανόνας ένωσης)

Κάλυψη (Cover)

- **Παράδειγμα:** Θεωρείστε τα σύνολα ΣΕ

$$F = \{B \rightarrow CD, AD \rightarrow E, B \rightarrow A\}$$

$$G = \{B \rightarrow CDE, B \rightarrow ABC, AD \rightarrow E\}$$

Δείξτε ότι το F καλύπτει το G.

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ΣΕ του G μπορεί να εξαχθεί από το F με χρήση των κανόνων συνεπαγωγής.

- Από $B \rightarrow ACD$ και $B \rightarrow B$, εξάγουμε την $B \rightarrow ABCD$ (κανόνας ένωσης)
- Από $B \rightarrow ABCD$ εξάγουμε την $B \rightarrow AD$ (κανόνας αποσύνθεσης)
- Από $B \rightarrow AD$ και $AD \rightarrow E$ εξάγουμε την $B \rightarrow E$ (κανόνας μεταβατικότητας)

Κάλυψη (Cover)

- **Παράδειγμα:** Θεωρείστε τα σύνολα ΣΕ

$$F = \{B \rightarrow CD, AD \rightarrow E, B \rightarrow A\}$$

$$G = \{B \rightarrow CDE, B \rightarrow ABC, AD \rightarrow E\}$$

Δείξτε ότι το F καλύπτει το G.

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ΣΕ του G μπορεί να εξαχθεί από το F με χρήση των κανόνων συνεπαγωγής.

- Από $B \rightarrow ABCD$ και $B \rightarrow E$ εξάγουμε την $B \rightarrow ABCDE$ (κανόνας ένωσης)
- Από $B \rightarrow ABCDE$ εξάγουμε την $B \rightarrow CDE$ και την $B \rightarrow ABC$ (κανόνας αποσύνθεσης)

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Επένδυση για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

•Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

•Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

–που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο

–που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο

–που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

•Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Δημήτρης Πλεξουσάκης. «**Αρχεία και Βάσεις Δεδομένων. Διάλεξη 2η: Μοντέλο Οντοτήτων-Συσχετίσεων**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy360/>