Μαθηματική Μοντελοποίηση και Αριθμητική Προσομοίωση

Σταύρος Κομηνέας

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μηχανική και κίνηση δινών

1.1 Σημειακά σωμάτια

1.1.1 Διανύσματα

Στην μηχανική υποθέτουμε πολλές φορές ότι τα σωμάτια δεν έχουν μέγεθος και παριστάνουμε την θέση τους με ένα σημείο. Η θέση λοιπόν ενός *σημειακού σωματίου* δίνεται από ένα διάνυσμα $\boldsymbol{r}$ το οποίο παριστάνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}},$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και x, y, z είναι οι συντεταγμένες του σωματίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω θέση σωματίου επάνω στον οριζόντιο άξονα

$$\boldsymbol{r} = \alpha t\, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \tag{1.1.1}$$

όπου α είναι μία σταθερά. Αν υποτεθεί ότι η μεταβλητή t παριστάνει τον χρόνο, τότε η παραπάνω εξίσωση δίνει την θέση σημειακού σωματίου το οποίο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. □

Ταχύτητα λέγεται η χρονική παράγωγος της θέσης, δηλαδή το διάνυσμα

$$\boldsymbol{v} := \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Στην περίπτωση του παραπάνω σωματίου έχουμε $\boldsymbol{v} = \alpha\, \hat{\boldsymbol{\imath}}$, το οποίο είναι ένα σταθερό διάνυσμα.

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου

$$\boldsymbol{r} = \alpha t\, \hat{\boldsymbol{\imath}} - \frac{1}{2} g t^2\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \tag{1.1.2}$$

ώστε η ταχύτητά του είναι

$$\boldsymbol{v} = \alpha\, \hat{\boldsymbol{\imath}} - g t\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}.\square$$

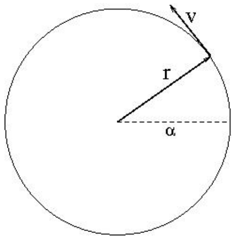
Παράδειγμα 1.1.3. (κυκλική κίνηση) Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου σε κυκλική κίνηση, όπως στο σχήμα 1.1,

$$\boldsymbol{r} = \alpha \sin(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \alpha \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}. \tag{1.1.3}$$

Πραγματικά το σωμάτιο αυτό βρίσκεται πάντα επάνω σε κύκλο ακτίνας $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{\alpha^2 \sin^2(\omega t) + \alpha^2 \cos^2(\omega t)} = \alpha$. Η ταχύτητά του είναι

$$\boldsymbol{v} := \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \omega\alpha \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{\imath}} - \omega\alpha \sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}.$$

Παρατηρούμε ότι $|\boldsymbol{v}| = \omega\alpha$ είναι σταθερό διάνυσμα. Επίσης $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = 0$, δηλαδή το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης. □



Σχήμα 1.1: Σωμάτιο σε κυκλική κίνηση.

Παράδειγμα 1.1.4. (κυκλοειδής κίνηση) Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 \\
\boldsymbol{r}_1 &= \alpha\omega t\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \alpha\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
\boldsymbol{r}_2 &= \alpha \sin(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \alpha \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}.
\end{aligned}$$

Η ταχύτητά του είναι

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \omega\alpha[1 + \cos(\omega t)]\, \hat{\boldsymbol{\imath}} - \omega\alpha \sin(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}.\square$$

1.1.2 Πολικές συντεταγμένες

Είναι πολύ συχνά ευκολότερο να περιγράψουμε την θέση ή την κίνηση ενός σωματίου σε πολικές συντεταγμένες (παρά στις συνήθεις καρτερσιανές). Θεωρούμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$. Η θέση σωματίου δίνεται από το διάνυσμα

$$\boldsymbol{r} = r\, \hat{\boldsymbol{e}}_r.$$

Τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις δύο διευθύνσεις είναι

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -\sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}.$$

Η ταχύτητα του σωματίου είναι

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\, \hat{\boldsymbol{e}}_r + r\, \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_r}{dt},$$

όπου έχουμε

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}) = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt}\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt}\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Θέτουμε $d\theta/dt := \dot{\theta}$ και $dr/dt := \dot{r}$ και γράφουμε τελικά

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\, \hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta. \tag{1.1.4}$$

Παράδειγμα 1.1.5. Αν γράψουμε $\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{e}}_r = r\,(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}})$, παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα (1.1.3), οι πολικές συντεταγμένες είναι $r = \alpha$, $\theta = \omega t$. Ώστε $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ και άρα έχουμε ταχύτητα

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \alpha\omega\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta.\Box$$

Βιβλιογραφία: [5, 7]

1.2 Δυναμική σημειακών σωμάτων

1.2.1 Νόμοι του Νεύτωνα

Παρατήρηση 1.2.1. (1ος νόμος του Νεύτωνα) *Σώμα στο οποίο δεν επιδρούν δυνάμεις κινείται σε ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα.* □

Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε ένα σώμα το οποίο βρίσκεται σε ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Είναι προφανές ότι ένας περιστρεφόμενος παρατηρητής δεν θα βλέπει το ίδιο σώμα να βρίσκεται σε ευθύγραμμη κίνηση. Άρα με τον 1ο νόμο του Νεύτωνα εισάγεται η έννοια ενός *αδρανειακού συστήματος αναφοράς* ως προς το οποίο γίνονται οι παρατηρήσεις.

Προχωρούμε τώρα να μελετήσουμε αλληλεπίδραση δύο σωμάτων. Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν το πείραμα δείχνει ότι έχουμε μεταβολή των ταχυτήτων τους σε αντίθετες κατευθύνσεις:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = -c\,\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt},$$

όπου c είναι μία σταθερά. Γράφουμε αυτή την σχέση ως

$$m_1\,\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = -m_2\,\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d(m_1\boldsymbol{v}_1)}{dt} = -\frac{d(m_2\boldsymbol{v}_2)}{dt}.$$

Οι m_1, m_2 είναι σταθερές, λέγονται μάζες των σωμάτων, χαρακτηρίζουν το κάθε σώμα και δεν εξαρτώνται από το ζευγάρι των σωμάτων που μελετάμε.

Η παραπάνω σχέση δίνει αφορμή να ορίσουμε την *γραμμική ορμή*

$$\boldsymbol{p} := m\boldsymbol{v}. \tag{1.2.1}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι μεταβολή της ορμής ενός σώματος προκαλείται από την επίδραση άλλου σώματος. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ότι το κάθε σώμα ασκεί στο άλλο μία *δύναμη*.

Παρατήρηση 1.2.2. (2ος νόμος του Νεύτωνα) *Λέμε ότι σε σώμα του οποίου αλλάζει η κινητική κατάσταση (δηλαδή, του οποίου αλλάζει η ορμή) ασκείται δύναμη η οποία είναι ίση με*

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.\Box$$

Εδώ έχουμε ουσιαστικά εισαγάγει μία ακόμα βασική έννοια, εκείνη της *επιτάχυνσης*

$$\boldsymbol{a} := \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{1.2.2}$$

Η δύναμη είναι ανάλογη της επιτάχυνσης με βάση τον 2ο νόμο:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

Γιά το παράδειγμα (1.1.1) έχουμε

$$\boldsymbol{r} = \alpha t\, \hat{\boldsymbol{\imath}} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \alpha\, \hat{\boldsymbol{\imath}} \Rightarrow \boldsymbol{a} = 0.$$

Αυτό το αποτέλεσμα ουσιαστικά αντιστοιχεί στον 1ο νόμο του Νεύτωνα. Γιά το παράδειγμα (1.1.2)

$$\boldsymbol{r} = \alpha t\, \hat{\boldsymbol{\imath}} - \frac{1}{2}\, g t^2\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \alpha\, \hat{\boldsymbol{\imath}} - g t\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \Rightarrow \boldsymbol{a} = -g\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}.$$

Γιά το παράδειγμα (1.1.3)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r} = \alpha \left[\sin(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}\right] \\
\Rightarrow\ &\boldsymbol{v} = \omega\alpha \left[\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{\imath}} - \sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right] \\
\Rightarrow\ &\boldsymbol{a} = -\omega^2\alpha \left[\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right] = -\omega^2\, \boldsymbol{r}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.2.3. (3ος νόμος του Νεύτωνα) *Οι δυνάμεις μεταξύ δύο σωμάτων είναι ίσες και αντίθετες:*

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$$

και τις ονομάζουμε δράση και αντίδραση. □

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι μεταβολές της ορμής γιά ένα ζευγάρι σωμάτων είναι αντίθετες, ώστε γράφουμε

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = -\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = const.$$

Η σχέση αυτή είναι βέβαια η ίδια με εκείνη που γράψαμε πριν τον 2ο νόμο.

Άσκηση 1.2.1. Γράψτε τη γενική μορφή του διανύσματος της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες.
Λύση.

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\, \hat{\boldsymbol{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta. \ \square$$

Βιβλιογραφία: [6, 5, 7]

1.2.2 Δυναμική ενέργεια και δύναμη

Θεωρούμε ένα σωμάτιο που κινείται σε μία διάσταση και δύναμη που εξαρτάται από την θέση x, δηλαδή, $F = F(x)$. Τότε μπορούμε συνήθως να ορίσουμε μία συνάρτηση $V = V(x)$ τέτοια ώστε $F = -dV/dx$. Ο 2ος νόμος Νεύτωνα έχει τη μορφή

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{dx}. \tag{1.2.3}$$

Η $V(x)$ λέγεται συνάρτηση *δυναμικής ενέργειας*. Η ποσότητα

$$p := mv \tag{1.2.4}$$

λέγεται *ορμή* του σώματος. Θα θεωρήσουμε την εξ. Νεύτωνα (1.2.3) ως δευτέρας τάξεως στη μεταβλητή θέσης x και μπορούμε να την γράψουμε ως σύστημα εξισώσεων 1ης τάξης

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \\
\frac{dp}{dt} &= -\frac{dV}{dx}
\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Η μηχανική ενέργεια του σώματος είναι

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{1.2.6}$$

Μπορούμε να δούμε ότι δεν μεταβάλεται με τον χρόνο κατά την εξέλιξη του συστήματος. Θεωρούμε την E ως συνάρτηση των p, x, παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης (1.2.5):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}\left(-\frac{dV}{dx}\right) + \frac{dV}{dx}\frac{p}{m} = 0.$$

Λέμε ότι η E είναι μία *διατηρήσιμη ποσότητα* της κίνησης.

Τα παραπάνω μπορούν να γενικευθούν γιά δυνάμεις που ορίζονται στον τριδιάστατο χώρο $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ στην περίπτωση που υπάρχει πραγματική συνάρτηση $V(\boldsymbol{r})$ τέτοια ώστε η δύναμη να μπορεί να γραφεί ως

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r}). \tag{1.2.7}$$

Τότε μπορούμε να ορίσουμε την ενέργεια

$$\mathcal{E} := \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + V(\boldsymbol{r}), \tag{1.2.8}$$

η οποία μπορεί να δειχθεί ότι είναι διατηρήσιμη ποσότητα.

Άσκηση 1.2.2. Από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (1.2.8) να παραχθεί μία εξίσωση δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα 1.2.1. (κεντρικό δυναμικό) Έστω ένα σωμάτιο το οποίο κινείται σε δύο διαστάσεις και βρίσκεται σε *κεντρικό δυναμικό*, δηλαδή, όταν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (r, θ), το δυναμικό είναι της μορφής $V = V(r)$. Θα βρούμε διατηρήσιμες ποσότητες γιά αυτό το σύστημα.
Λύση. Η ενέργεια του είναι

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + V(r),$$

Σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \tag{1.2.9}$$

και μπορεί να δειχθεί ότι αυτή η ποσότητα διατηρείται.

Γράφουμε την εξίσωση Νεύτωνα στην μορφή

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{dV}{dr}\hat{\boldsymbol{e}}_r \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp_x}{dt} & = -\frac{dV}{dr}\frac{x}{r} \\ \frac{dp_y}{dt} & = -\frac{dV}{dr}\frac{y}{r}. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x\frac{dp_y}{dt} - y\frac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(xp_y - yp_x\right) = 0$$

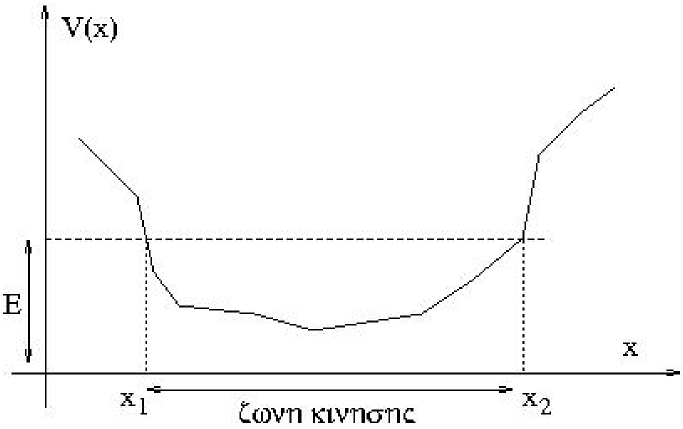
άρα η ποσότητα

$$p_\theta := xp_y - yp_x \tag{1.2.11}$$

είναι διατηρήσιμη γιά ένα κεντρικό δυναμικό. Η (1.2.11) λέγεται *στροφορμή*.

Άσκηση 1.2.3. ([2] Άσκ. 5.13) Θεωρήστε το κεντρικό δυναμικό $V(r) = -k/r^2$. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. (β) Λύστε αναλυτικά τις εξισώσεις κίνησης. (γ) Προσδιορίσθε την κίνηση.

Βιβλιογραφία: [2, 5, 7]



Σχήμα 1.2: Ένα δυναμικό το οποίο παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

1.2.3 Γραφική παράσταση δυναμικού (*)

Ας υποθέσουμε ένα δυναμικό το οποίο έχει ένα τοπικό ελάχιστο όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Γιά να καταλάβουμε ποιοτικά την κίνηση σωματίου γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,[\mathcal{E} - V(x)]}, \tag{1.2.12}$$

όπου $\mathcal{E}$ είναι η σταθερά που δίνει την ενέργεια του σωματίου. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{E}$ είναι μεγαλύτερη από το ελάχιστο του $V(x)$ και ότι έχουμε δύο σημεία x_1, x_2 εκατέρωθεν της θέσης του ελαχίστου γιά τα οποία ισχύει $\mathcal{E} = V(x_1)$ και $\mathcal{E} = V(x_2)$. Πρέπει να είναι σαφές ότι η κίνηση είναι δυνατή μόνο στο διάστημα $x_1 \le x \le x_2$ όπου $\mathcal{E} > V(x)$, δηλαδή στο διάστημα όπου η υπόριζος ποσότητα στην Εξ. (1.2.12) είναι μη αρνητική. Στα άκρα του διαστήματος η Εξ. (1.2.12) δίνει $v(x_1) = 0, v(x_2) = 0$ και, με βάση το σχήμα, βλέπουμε ότι η ταχύτητα ενός σωματίου που κινείται μέσα σε αυτό το δυναμικό αλλάζει πρόσημο κάθε φορά που αυτό φθάνει στα σημεία x_1 ή x_2. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ένα σωμάτιο θα παλινδρομεί μεταξύ των x_1 και x_2.

Παρατηρούμε επίσης ότι η ταχύτητα v είναι συνάρτηση της θέσης $v = v(x)$ και μόνο. Αυτή η παρατήρηση σε συνδυασμό με την Εξ. (1.2.12) δείχνει ότι η χρονική διάρκεια της κίνησης από το x_1 στο x_2 και πάλι στο x_1 είναι σταθερή και άρα μπορεί κανείς τελικά να συμπεράνει ότι η κίνηση ενός σωματίου μέσα σε ένα τυχαίο δυναμικό, σαν αυτό του σχήματος, είναι *περιοδική*.

Βιβλιογραφία: [5, 7]

1.2.4 Μη-διατηρητικά συστήματα

Θα δούμε το παράδειγμα ενός μη-αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.

Θεωρούμε έναν αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος συναντά κάποια αντίσταση κατά την κίνησή του (π.χ., τριβή, αντίσταση του αέρα, κλπ). Μία τέτοια διαδικασία παριστάνεται από μία επιπλέον δύναμη της μορφής $-c\dot{x}$ όπου c είναι μία σταθερά. Αυτός ο όρος παριστάνει δύναμη που μειώνει την επιτάχυνση (όταν $c > 0$). Γράφουμε λοιπόν την εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \tag{1.2.13}$$

Η ενέργεια του ταλαντωτή (η οποία διατηρείται όταν δεν υπάρχει τριβή) είναι η

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,kx^2.$$

Όταν υπάρχει τριβή μπορούμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως εξής

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -c\dot{x}^2 < 0$$

δηλαδή, η ενέργεια $\mathcal{E}$ μειώνεται με τον χρόνο.

Βιβλιογραφία: [2, 5, 7]

1.3 Φορτίο σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

1.3.1 Φορτίο σε ηλεκτρικό πεδίο

Θεωρούμε διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ το οποίο παριστάνει ηλεκτρικό πεδίο. Η ηλεκτρική δύναμη σε φορτίο q δίνεται από την $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$. Θεωρούμε ότι το φορτίο έχει μάζα m, ώστε οι εξισώσεις Νεύτωνα είναι

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E}. \tag{1.3.1}$$

Παρατήρηση 1.3.1. *Από την Εξ.* (1.3.1) *είναι φανερό ότι το φορτίο θα έχει την τάση να κινηθεί προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου* $\boldsymbol{E}$.

Μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση δυναμικού $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r})$ τέτοιο ώστε η κλίση του να δίνει το ηλεκτρικό πεδίο: $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$. Ας περιοριστούμε σε ένα επίπεδο, ώστε $\Phi = \Phi(x, y)$ και οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Το δυναμικό είναι χρήσιμο στον ορισμό της ενέργειας του συστήματος

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\Phi(x, y). \tag{1.3.3}$$

Αυτή διατηρείται:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial x}\dot{x} + q\frac{\partial \Phi}{\partial y}\dot{y} = \dot{x}\left(-q\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \dot{y}\left(-q\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + q\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\dot{x} + q\frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\dot{y} = 0.$$

1.3.2 Φορτίο σε μαγνητικό πεδίο

Αν το σωμάτιο μάζας m φορτισμένο με ηλετρικό φορτίο q κινείται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$, τότε υπόκειται σε μία δύναμη Lorentz η οποία εξαρτάται και από την ταχύτητά του $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{F}_L = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

Θα θεωρήσουμε στα παρακάτω την περίπτωση ενός σταθερού ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, όπου B είναι σταθερά. Ας περιοριστούμε επίσης στην περίπτωση που το φορτίο κινείται σε έναν *διδιάστατο χώρο*, δηλαδή στο επίπεδο (x, y). Σύμφωνα με το νόμο του Newton οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_L \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} &= qB\,\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\,\dot{x}. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Η γενική λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι η

$$x = x_0 + R\,\sin(\omega_c t + \delta), \qquad y = y_0 + R\,\cos(\omega_c t + \delta),$$

όπου

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

λέγεται *συχνότητα κυκλότρου*, ενώ R, δ, x_0 και y_0 είναι αυθαίρετες σταθερές. Η λύση των εξισώσεων περιγράφει κυκλική κίνηση με συχνότητα ω_c και ακτίνα R ενώ δ είναι μία φάση.

1.3.3 Φορτίο σε μαγνητικό πεδίο: Νόμοι διατήρησης

Οι δύο εξισώσεις της κίνησης (1.3.4) γράφονται και ως

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_c} - \dot{y} = 0, \qquad \frac{\ddot{y}}{\omega_c} + \dot{x} = 0. \tag{1.3.5}$$

Αυτές γράφονται ως χρονικές παράγωγοι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\omega_c} - y\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\omega_c} + x\right) = 0,$$

δηλαδή βρίσκουμε ότι οι ποσότητες στις παρενθέσεις είναι διατηρήσιμες ποσότητες της κίνησης. Θα γράψουμε αυτές τις διατηρήσιμες ποσότητες στην μορφή

$$R_x := x + \frac{\dot{y}}{\omega_c}, \qquad R_y := y - \frac{\dot{x}}{\omega_c}. \tag{1.3.6}$$

Αυτές οι ποσότητες είναι χρήσιμες γιά την περιγραφή της κίνησης επειδή ακριβώς είναι διατηρήσιμες ποσότητες και το διάνυσμα (R_x, R_y) λέγεται *οδηγός της κίνησης* (guiding center), διότι δίνει περίπου την θέση του σωματίου.

Τέλος, σημειώνουμε ότι το σύστημα έχει ενέργεια

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{1.3.7}$$

Αυτή είναι διατηρήσιμη:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = \dot{x}(qB\dot{y}) + \dot{y}(-qB\dot{x}) = 0.$$

Παράδειγμα 1.3.1. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωμάτιο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t=0) = 0$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0)$, $y_0 := y(t=0)$. Βρείτε την τροχιά του.
Λύση. Θα λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μόνο τις διατηρήσιμες ποσότητες. Υπολογίζουμε τις τιμές τους γιά χρόνο $t = 0$:

$$\mathcal{E} = 0, \qquad R_x = x_0, \qquad R_y = y_0.$$

Επειδή η ενέργεια $\mathcal{E}$ διατηρείται στον χρόνο έχουμε ότι γιά κάθε t

$$\mathcal{E} = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0,\, \dot{y} = 0.$$

Επίσης $R_x = x$, $R_y = y$ διατηρούνται και άρα η λύση είναι απλή $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ γιά κάθε t. □

Παράδειγμα 1.3.2. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωμάτιο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t=0) = \omega_c$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0) = 1$, $y_0 := y(t=0) = 0$. Βρείτε την τροχιά του.
Λύση. Βρίσκουμε πρώτα ότι

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = \frac{1}{2}\, m\omega_c^2$$
$$R_x = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega_c} = 2, \qquad R_y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega_c} = 0.$$

Από τη διατήρηση του οδηγού της κίνησης προκύπτει

$$x + \frac{\dot{y}}{\omega_c} = 2 \Rightarrow \dot{y} = \omega_c(2 - x), \qquad y - \frac{\dot{x}}{\omega_c} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \omega_c y.$$

Από την διατήρηση της ενέργειας $\mathcal{E}$ και με χρήση των σχέσεων που μόλις βρήκαμε έχουμε

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega_c^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1.$$

Άρα το σωμάτιο κάνει κυκλική κίνηση μοναδιαίας ακτίνας και με κέντρο τον οδηγό της κίνησης $(R_x, R_y) = (2, 0)$. Αυτό το παράδειγμα παρέχει μία αιτιολογία γιά το όνομα "οδηγός της κίνησης" το οποίο δόθηκε στο διάνυσμα (R_x, R_y). □

Άσκηση 1.3.1. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωμάτιο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0)$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t=0)$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0)$, $y_0 := y(t=0)$. Βρείτε την τροχιά του με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα παραδείγματα. [Υπόδειξη: Υπολογίστε την ποσότητα $(x-R_x)^2 + (y-R_y)^2$.]

Άσκηση 1.3.2. Κατασκευάστε αριθμητικό κώδικα στον οποίο θα δίνονται οι αρχικές συνθήκες και θα παράγεται η τροχιά.

Βιβλιογραφία: [13], σελ. 259-264

1.3.4 Φορτίο σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε ένα σωμάτιο μάζας m φορτισμένο με ηλετρικό φορτίο q το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ και ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{B}$, δηλαδή, είναι της μορφής $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$.

Οι εξισώσεις κίνησης του σωματίου είναι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\,\dot{y} + qE_x \\ m\ddot{y} &= -qB\,\dot{x} + qE_y. \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

1.3.5 Ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Θα μελετήσουμε την περίπτωση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$, όπου το E είναι σταθερά. Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{x} - qB\,y) = qE \Rightarrow \frac{dR_y}{dt} = -\frac{E}{B} \\ &\frac{d}{dt}(m\dot{y} + qB\,x) = 0 \Rightarrow \frac{dR_x}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων βρίσκονται εύκολα και είναι

$$R_x = R_x^{(0)}, \qquad R_y = -\frac{E}{B}\,t + R_y^{(0)},$$

όπου (R_x, R_y) είναι ο οδηγός της κίνησης και $R_x^{(0)}, R_y^{(0)}$ είναι σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και δίνουν τον οδηγό της κίνησης στον χρόνο $t = 0$. Σημειώστε ότι ενώ το R_x είναι διατηρήσιμη ποσότητα (όπως και στην περίπτωση της προηγουμένης παραγράφου όπου είχαμε μόνο μαγνητικό πεδίο), το R_y δεν είναι πλέον διατηρήσιμη ποσότητα. Βλέπουμε ότι ο οδηγός της κίνησης κάνει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση προς την κατεύθυνση y. Ο οδηγός της κίνησης δεν συμπίπτει με την θέση του σωματίου. Όμως, είναι εύλογο να υποθέσει κανείς ότι η θέση του σωματίου είναι κοντά στον οδηγό της κίνησης. Αυτή η εικόνα είναι σωστή ειδικά όταν το μαγνητικό πεδίο B είναι μεγάλο. Συμπερασματικά, η λύση που βρήκαμε υποδεικνύει ότι η κίνηση του σωματίου είναι περιορισμένη προς την κατεύθυνση x (αφού το R_x είναι σταθερό στον χρόνο), ενώ το σωμάτιο κινείται προς την κατεύθυνση y.

Εδώ πρέπει να σημειώσει κανείς το παράδοξο της κίνησης του φορτίου κάθετα ακριβώς στην διεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης (δηλαδή κατά την κατεύθυνση y). Σύμφωνα με όσα είμαστε συνηθισμένοι να σκεφτόμαστε, με βάση τους νόμους του Νέυτωνα, η επιτάχυνση είναι κατά την κατεύθυνση της δύναμης και άρα και η κίνηση θα περιμέναμε να ήταν προς την ίδια κατεύθυνση. Στο πρόβλημα όμως αυτού του κεφαλαίου το μαγνητικό πεδίο φαίνεται να έχει τελείως ανατρέψει αυτή τη λογική.

Τελικά σημειώνουμε ότι η *ενέργεια* του σωματίου προκύπτει από τις εκφράσεις που έχουν δωθεί στις προηγούμενες παραγράφους. Υπενθυμίζουμε ότι το δυναμικό φορτίου στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $V(x) = q\Phi(x) = -qEx$ και έχουμε ενέργεια

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\, m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x,y) \Rightarrow \\
\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\, m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qEx. \qquad (1.3.9)
\end{aligned}$$

Άσκηση 1.3.3. (α) Βρείτε την τροχιά του σωματίου $[x = x(t),\ y = y(t)]$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω λύσεις.
(β) Βρείτε αριθμητικά και σχεδιάστε την τροχιά του σωματίου γιά κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες της επιλογής σας.
(γ) Βρείτε μια ειδική λύση (γιά κατάλληλες αρχικές συνθήκες) η οποία περιγράφει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση του σωματίου.

1.3.6 Επίδραση δυνάμεων τριβής (*)

Γιά να μελετήσουμε την επίδραση δυνάμεων τριβής στο σύστημα πρέπει να προσθέσουμε έναν κατάλληλο όρο στις Εξ. (1.3.8). Αυτός μπορεί να έχει την μορφή $-\alpha\dot{x}$ γιά την πρώτη εξίσωση και $-\alpha\dot{y}$ γιά την δεύτερη, όπου α είναι μία θετική σταθερά που ονομάζεται σταθερά τριβής. Γράφουμε τις νέες εξισώσεις ως εξής

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= qB\,\dot{y} + qE - \alpha\dot{x} \\
m\ddot{y} &= -qB\,\dot{x} - \alpha\dot{y}. \qquad (1.3.10)
\end{aligned}$$

Άσκηση 1.3.4. Οι δυνάμεις τριβής θα πρέπει (εκ του ορισμού τους) να μειώνουν την ενέργεια ενός κινούμενου σωματίου. Δείξτε ότι η ενέργεια (1.3.9) του συστήματος μειώνεται με τον χρόνο όταν ισχύουν οι Εξ. (1.3.10).
Λύση. Παίρνουμε την χρονική παράγωγο της ενέργειας

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} - qE\dot{x}.$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{x}(qB\,\dot{y} + qE - \alpha\dot{x}) + \dot{y}(-qB\,\dot{x} - \alpha\dot{y}) - qE\dot{x} = -\alpha(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

ώστε βρίσκουμε ότι $\mathcal{E}/dt < 0$ όταν κινείται το σωμάτιο (όταν $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$). Άρα λοιπόν η ενέργεια θα μειώνεται ώσπου να ακινητοποιηθεί το φορτίο. □

Μπορούμε να γράψουμε τις Εξ. (1.3.10) και ως εξής:

$$\dot{R}_x = -\frac{\alpha}{qB}\,\dot{y}, \qquad \dot{R}_y = -\frac{E}{B} + \frac{\alpha}{qB}\,\dot{x}. \qquad (1.3.11)$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων θα μπορούσε να λυθεί, όμως εδώ θα περιορισθούμε στην συμπεριφορά του συστήματος γιά μεγάλους χρόνους. Στην τελική κατάσταση ($t \to \infty$) θα υποθέσουμε ότι έχουμε $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ και άρα έχουμε γιά τα $\dot{x}, \dot{y}$ τις εξής αλγεβρικές εξισώσεις

$$\dot{y} - \frac{\alpha}{qB}\,\dot{x} = -E/B, \qquad \dot{x} + \frac{\alpha}{qB}\,\dot{y} = 0$$

και λύνοντας αυτές παίρνουμε

$$\dot{y} = \frac{-(qE)(qB)}{(qB)^2 + \alpha^2}, \qquad \dot{x} = \frac{\alpha(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}. \tag{1.3.12}$$

Αυτές οι εξισώσεις δίνουν την κίνηση του σωματίου.

Γιά λόγους ομοιομορφίας με τα αποτελέσματα των προηγουμένων παραγράφων θα μελετήσουμε τον οδηγό της κίνησης (R_x, R_y). Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα γιά τα $\dot{x}, \dot{y}$ στις εξισώσεις κίνησης γιά να βρούμε τελικά

$$\dot{R}_x = \frac{\alpha(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}, \qquad \dot{R}_y = \frac{-(qB)(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}. \tag{1.3.13}$$

Αυτές οι εκφράσεις συμπίπτουν με τις παραπάνω γιά τα $\dot{x}, \dot{y}$.

Αν θεωρήσουμε τώρα ως ταχύτητα του σωματίου το διάνυσμα $\boldsymbol{V} = (\dot{R}_x, \dot{R}_y)$ παρατηρούμε ότι το σωμάτιο κινείται υπό γωνία δ ως προς τον άξονα x, όπου

$$\tan\delta = \frac{\dot{R}_y}{\dot{R}_x} = -\frac{qB}{\alpha}. \tag{1.3.14}$$

Γιά την περίπτωση που η σταθερά τριβής είναι πολύ μικρή (θεωρούμε $\alpha \to 0$) βρίσκουμε $\delta = \pi/2$, δηλαδή κίνηση κατά τον άξονα y όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο. Όταν όμως έχουμε τριβή ($\alpha \neq 0$) τότε το σωμάτιο κινείται υπό γωνία $0 < \delta < \pi/2$.

Άσκηση 1.3.5. Βρείτε αριθμητικά και σχεδιάστε την τροχιά του σωματίου γιά κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες της επιλογής σας και γιά μία σταθερά τριβής $\alpha > 0$.

Άσκηση 1.3.6. Μελετήστε εκτενέστερα το σύστημα των εξισώσεων (1.3.10).

1.4 Ζεύγος φορτίων σε μαγνητικό πεδίο

Γιά να περιγράφουμε περισσότερα από ένα φορτισμένα σωμάτια τα οποία βρίσκονται σε μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{z}$ θα πρέπει να γενικεύσουμε τις εξισώσεις κίνησης.

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε δυναμική ενέργεια $V(x_i, y_i)$ που περιγράφει αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο φορτίων και είναι της μορφής

$$V = V(\ell), \qquad \ell := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

όπου ℓ είναι η απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων.

Αφού έχουμε τέσσερις μεταβλητές μπορούμε να γράψουμε τέσσερις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_1 - q_1 B\, y_1\right) &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\
\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_2 - q_2 B\, y_2\right) &= -\frac{\partial V}{\partial x_2} \\
\frac{d}{dt}\left(m\dot{y}_1 + q_1 B\, x_1\right) &= -\frac{\partial V}{\partial y_1} \\
\frac{d}{dt}\left(m\dot{y}_2 + q_2 B\, x_2\right) &= -\frac{\partial V}{\partial y_2}.
\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Σημειώνουμε ότι γιά τα δυναμικά αληλεπίδρασης που θεωρούμε εδώ ισχύει

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = V'(\ell)\frac{\partial \ell}{\partial x_1} = V'(\ell)\frac{x_1 - x_2}{\ell}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = V'(\ell)\frac{\partial \ell}{\partial x_2} = V'(\ell)\frac{x_2 - x_1}{\ell}, \tag{1.4.2}$$

άρα έχουμε $\partial V/\partial x_1 = -\partial V/\partial x_2$ και επίσης ισχύει $\partial V/\partial y_1 = -\partial V/\partial y_2$. Αν προσθέσουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις και τις δύο πρώτες βρίσκουμε τις εξής δύο σχέσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q_1 x_1 + q_2 x_2}{q_1 + q_2} + \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{\omega_c}\right) = 0, \tag{1.4.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q_1 y_1 + q_2 y_2}{q_1 + q_2} - \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{\omega_c}\right) = 0, \qquad \omega_c := \frac{(q_1 + q_2)B}{m}. \tag{1.4.4}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον *οδηγό της κίνησης* (R_x, R_y) γιά ένα ζεύγος φορτίων ως

$$R_x := \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2}{q_1 + q_2} + \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{\omega_c}, \qquad R_y := \frac{q_1 y_1 + q_2 y_2}{q_1 + q_2} - \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{\omega_c}$$

και οι παραπάνω εξισώσεις αποδεικνύουν ότι αυτές οι δύο ποσότητες είναι διατηρήσιμες. Παρατηρήστε ότι οι ποσότητες $x_{\mathrm{m}} := (q_1 x_1 + q_2 x_2)/(q_1 + q_2),\ y_{\mathrm{m}} := (q_1 y_1 + q_2 y_2)/(q_1 + q_2)$ δίνουν τις συντεταγμένες της μέσης θέσης του συστήματος φορτίων.

Τέλος μπορούμε να βρούμε την ενέργεια του συστήματος

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m \sum_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + V(x_i, y_i)$$

η οποία είναι επίσης διατηρήσιμη ποσότητα.

Παράδειγμα 1.4.1. Ας δούμε ένα ειδικό παράδειγμα όπου θα θεωρήσουμε την μάζα των φορτίων $m = 0$ και δυναμικό αλληλεπίδρασης της μορφής

$$V(\ell) = -q_1 q_2\, \ln(\ell). \tag{1.4.5}$$

Θα γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης γιά αυτήν την περίπτωση.

Λύση. Έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -q_1 q_2 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y_1} = -q_1 q_2 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2} = -\frac{\partial V}{\partial y_2}.$$

Οι Εξ. (1.4.1) γίνονται

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{q_2}{B}\frac{y_1 - y_2}{\ell^2}, \qquad & \dot{x}_2 &= -\frac{q_1}{B}\frac{y_1 - y_2}{\ell^2}, \\ \dot{y}_1 &= -\frac{q_2}{B}\frac{x_1 - x_2}{\ell^2}, \qquad & \dot{y}_2 &= \frac{q_1}{B}\frac{x_1 - x_2}{\ell^2}. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Θα δούμε σε επόμενη παράγραφο ότι αυτές οι εξισώσεις κίνησης έχουν την ίδια μορφή με τις εξισώσεις κίνησης δύο αλληλεπιδρώντων δινών. □

Άσκηση 1.4.1. Γράψτε το σύστημα των εξισώσεων (1.4.1) γιά ζεύγος φορτίων σε σταθερό μαγνητικό πεδίο με δυναμικό αλληλεπίδρασης

$$V = -q_1 q_2 \ln(\ell).$$

(α) Ορίστε νέες παραμέτρους ώστε να γράψετε το σύστημα σε πιό απλή μορφή. (β) Γράψτε ένα ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων 1ης τάξεως. (γ) Λύστε αριθμητικά τις εξισώσεις γιά δεδομένες αρχικές συνθήκες.
Λύση. (α) Το σύστημα είναι

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{x}_1}{\omega_1} - \dot{y}_1 &= p_2 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2}, \qquad & \frac{\ddot{x}_2}{\omega_2} - \dot{y}_2 &= -p_1 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2} \\ \frac{\ddot{y}_1}{\omega_1} + \dot{x}_1 &= p_2 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2}, \qquad & \frac{\ddot{y}_2}{\omega_2} + \dot{x}_2 &= -p_1 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2}, \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

όπου έχουμε ορίσει τις νέες παραμέτρους

$$\omega_i = \frac{q_i B}{m}, \quad p_i = \frac{q_i}{B}, \qquad i = 1, 2. \tag{1.4.8}$$

(β)

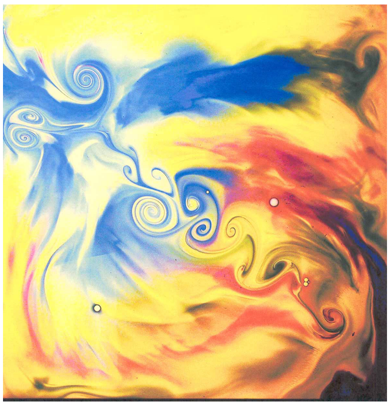
$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \omega_1 \left(u_1 + p_2 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2} \right), \qquad & \dot{x}_1 &= v_1 \\ \dot{v}_2 &= \omega_2 \left(u_2 - p_1 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2} \right), \qquad & \dot{x}_2 &= v_2 \\ \dot{u}_1 &= \omega_1 \left(-v_1 + p_2 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2} \right), \qquad & \dot{y}_1 &= u_1 \\ \dot{u}_2 &= \omega_2 \left(-v_2 - p_1 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2} \right), \qquad & \dot{y}_2 &= u_2. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Άσκηση 1.4.2. Γενικεύστε τις εξισώσεις (1.4.1) γιά να περιγράψετε ένα σύστημα N αλληλεπιδρώντων φορτίων σε μαγνητικό πεδίο. [Υπόδειξη: Το δυναμικό μπορεί να δίνεται από ένα άθροισμα από όρους της μορφής $V(\ell_{ij}$ όπου ij είναι όλα τα δυνατά ζευγάρια φορτίων. Ακολούθως αρκεί να χρησιμοποιήσετε αθροίσματα στα δεξιά μέλη των εξισώσεων, γιά κάθε αλληλεπιδρόν φορτίο.] Βρείτε διατηρήσιμες ποσότητες γιά αυτό το σύστημα (ενέργεια, οδηγός της κίνησης).

1.5 Δίνες

1.5.1 Συνήθεις δίνες σε ρευστά

Δίνες εμφανίζονται και παίζουν σημαντικό ρόλο σε πάρα πολλά φυσικά συστήματα. Τα πιό γνωστά τέτοια συστήματα είναι τα ρευστά. Στην μηχανική ρευστών είναι γνωστό ότι οι δίνες (fluid vortices) παίζουν κεντρικό ρόλο στην περιγραφή και κατανόηση τόσο την κίνησης των ρευστών όσο και πιό περίπλοκων φαινομένων όπως η τυρβώδης ροή.



Σχήμα 1.3: Φωτογραφία δινών και ζευγών δινών οι οποίες δημιουργήθηκαν από την κίνηση ενός σωματίου στην επιφάνεια υγρού.

Η περιγραφή της κίνησης των ρευστών και άρα και της δυναμικής των δινών βασίζεται στις εξισώσης της μηχανικής ρευστών οι οποίες είναι μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Απλοποίηση της περιγραφής δινών προκύπτει στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι κάθε δίνη είναι μακριά από κάθε άλλη και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σημαντική κεντρική περιοχή της δίνης είναι μικρού μεγέθους σε σύγκριση με την απόσταση μεταξύ τους. Τότε μπορούμε να περιγράψουμε προσεγγιστικά την θέση κάθε δίνης από ένα σημείο. Λέμε τότε ότι έχουμε την προσέγγιση *σημειακών δινών*.

Στην περιγραφή δινών πολύ χρήσιμη είναι μία ποσότητα που λέγεται *στροβιλότητα* (vorticity, γ) και της οποίας το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια του ρευστού

$$\Gamma = \int \gamma dxdy$$

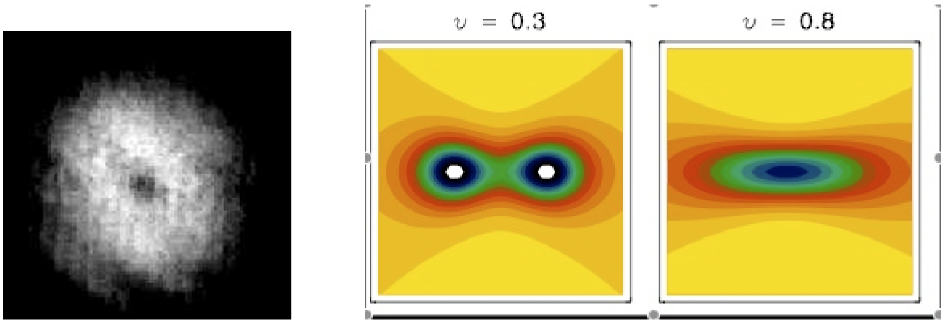
δίνει την ισχύ της δίνης. Επιπλέον, μπορεί να δειχθεί ότι γιά μία δίνη οι ποσότητες

$$I_x = \int x\gamma\, dxdy, \qquad I_y = \int y\gamma\, dxdy \tag{1.5.1}$$

είναι διατηρήσιμες. Αυτές οι ποσότητες μπορούν να θεωρηθούν ως ένας ορισμός της θέσης μίας δίνης (μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση). Στην περίπτωση που θεωρούμε την δίνη σημειακή μπορούμε εύκολα να δούμε ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα δίνουν την θέση της σημειακής δίνης πολλαπλασιασμένη με την ισχύ της. (Γιά κετενέστερη μελέτη μπορείτε να δείτε στο [14], κεφάλαιο 7.)

1.5.2 Δίνες σε υπερρευστά

Ορισμένα ρευστά επιδεικνύουν ασυνήθιστες ιδιότητες όταν βρίσκονται σε ιδιαίτερα χαμηλές θερμοκρασίες. Η πιό εντυπωσιακή ίσως ιδιότητα τους είναι ότι ρέουν χωρίς η κίνησή τους να επιβραδύνεται από φαινόμενα τριβής. Υγρά που παρουσιάζουν αυτή την ιδιότητά ονομάζονται *υπερρευστά*. Τα σημαντικότερα υπερρευστά είναι το στοιχείο Ήλιο σε θερμοκρασίες $T < 2.7$ Kelvin το οποίο είναι τότε σε υγρή κατάσταση. Επίσης, υπερρευστά είναι οι ατμοί αλκαλικών μετάλλων (Li, Na, K, Rb, Cs) οι οποίοι παγιδεύονται με μαγνητικά πεδία και ψύχονται σε θερμοκρασίες $T \sim 10 - 100$ nanoKelvin με οπτικά (LASER) και άλλα μέσα.



Σχήμα 1.4: [Αριστερά:] Φωτογραφία δίνης σε υπερρευστό (το λευκό χρώμα σημαίνει μέγιστη πυκνότητα και το μαύρο μηδενική πυκνότητα του υπερρευστού). [Δεξιά:] Αριθμητική προσομοίωση ζευγών δινών σε υπερρευστό (ο χρωματικός κώδικας αποδίδει την πυκνότητα του υπερρευστού).

Μία επιπλέον ιδιότητα των υπερρευστών είναι ότι οι δίνες που δημιουργούνται σε αυτά έχουν ισχύ η οποία είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας βασικής ποσότητας ισχύος. Τέτοιες δίνες ονομάζονται κβαντισμένες (quantized vortices). Η ιδιότητα αυτή των δινών σχετίζεται πάντως με την ιδιότητα της ροής χωρίς τριβή. Τα υπερρευστά και οι δίνες τους μελετώνται με την βοήθεια των νόμων της κβαντικής φυσικής. Σε ορισμένες περιπτώσεις η δυναμική τους μπορεί να περιγραφεί από μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις όμως αυτές διαφέρουν από εκείνες γιά τα συνήθη ρευστά στα οποία αναφερθήκαμε παραπάνω.

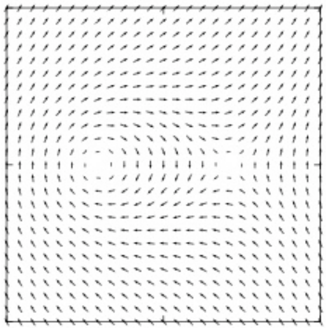
Ένα σημαντικό σημείο είναι ότι η vorticity στα υπερρευστα συνδέεται με τοπολογικά χαρακτηριστικά του πεδίου που περιγράφει το υπερρευστό (αυτό είναι ένα μιγαδικό πεδίο $\Psi(x,y)$ το οποίο ονομάζεται *κυματοσυνάρτηση*). Η ολική ισχύς $\Gamma = \int \gamma dx dy$ παίρνει διάκριτες τιμές και έχει την ερμηνεία ενός τοπολογικού αριθμού. Διατηρήσιμες ποσότητες ανάλογες των (1.5.1) υπάρχουν και σε αυτή την περίπτωση.

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση των σημειακών δινών και στο παρόν σύστημα. Έτσι μπορούμε να απλοποιήσουμε σημαντικά την μελέτη της δυναμικής τους.

1.5.3 Μαγνητικές δίνες

Παρά το ότι συνδέουμε συνήθως τις δίνες με τα ρευστά, η αλήθεια είναι ότι οι δίνες, ως μαθηματικές δομές διανυσματικών πεδίων, εμφανίζονται σε πολλά διαφορετικά συστήματα. Ένα παράδειγμα είναι τα μαγνητικά υλικά στα οποία έχουμε τις λεγόμενες *μαγνητικές δίνες*.

Η μικροσκοπική δομή σε ένα μαγνητικό υλικό περιγράφεται από ένα διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{m}(x,y)$ το οποίο παριστάνει την μαγνήτιση του υλικού σε κάθε σημείο (x,y) του υλικού. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τι δομές σχηματίζει η μαγνήτιση στο υλικό και ποιά είναι η δυναμική της. Γιά παράδειγμα, αυτό το ερώτημα αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά στον μαγνητικό δίσκο ενός υπολογιστή όπου η πληροφορία αποθηκεύεται σε



Σχήμα 1.5: Αριθμητική προσομοίωση ζεύγους μαγνητικών δινών (τα βελάκια αποδίδουν το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{m}$, δηλαδή, τον προσανατολισμό των μαγνητικών ροπών των ατόμων).

κάποιες ειδικές δομές της μαγνήτισης, ενώ γιά τα γραφτεί ή να σβηστεί μία πληροφορία θα πρέπει οι δομές αυτές να μεταβληθούν με ελεγχόμενο τρόπο.

Μία αριθμητική προσομοίωση μαγνητικών δομών οι οποίες χαρακτηρίζονται ως *μαγνητικές δίνες* παρουσιάζονται στο σχήμα 1.5. Στο σχήμα βλέπουμε ότι στην περίπτωση των μαγνητικών δινών δεν υπάρχει ροή πραγματικού ρευστού. Όμως μπορούμε να ορίσουμε μία ποσότητα q η οποία έχει ομοιότητες με την vorticity (γ) στα ρευστά. Η q δίνει κάποια τοπολογικά χαρακτηριστικά της μαγνήτισης και η ισχύς της δίνης $Q = \int q\, dxdy$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιάς βασικής ποσότητας.

Από τη θεωρία προκύπτουν διατηρήσιμες ποσότητες της μορφής

$$I_x = \int xq\, dxdy, \qquad I_y = \int yq\, dxdy \tag{1.5.2}$$

οι οποίες μοιάζουν με τις και (1.5.1). Μπορεί να δειχθεί ότι, στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι οι μαγνητικές δίνες είναι σημειακές, η δυναμική τους συμπεριφορά μοντελοποιείται από εξισώσεις ανάλογες με αυτές που των δινών σε ρευστά.

1.6 Δυναμική δινών

1.6.1 Εισαγωγή

Οι εξισώσεις κίνησης γιά αλληλεπιδρώσες δίνες δόθηκαν από τον Helmholtz σε μία εργασία του το 1858 με τον τίτλο "Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen". Στο μοντέλο που εισήγαγε ο Helmholtz θεωρεί ότι η στροβιλότητα περιορίζεται μέσα σε ορισμένες περιοχές που έχουν σχήμα ευθύγραμμων κυλίνδρων με ελάχιστη διάμετρο, οι οποίες λέγονται vortex filaments (νήματα δινών). Κάθε μία από αυτές τις δίνες χαρακτηρίζεται από την ισχύ της η οποία δόθηκε παραπάνω και ονομάζεται και *κυκλοφορία* αφού περιγράφει την κυκλοφορία του υγρού γύρω από το κέντρο της δίνης. Σε αυτή την προσέγγιση λέμε ότι έχουμε *σημειακές δίνες*.

Θα περιοριστούμε σε ροές σε δύο διαστάσεις, δηλαδή, θα θεωρήσουμε ότι η συμπεριφορά της δίνης (του vortex filament) μέσα στο υγρό ακολουθεί την συμπεριφορά της δίνης την οποία παρατηρούμε στην επιφάνεια του υγρού. Οι εξισώσεις κίνησης γιά δύο αλληλεπιδρώσες δίνες στο επίπεδο δίνονται από τις

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Q_2\,\frac{y_1-y_2}{\ell^2}, &\qquad \dot{x}_2 &= -Q_1\,\frac{y_1-y_2}{\ell^2}, \\ \dot{y}_1 &= -Q_2\,\frac{x_1-x_2}{\ell^2}, &\qquad \dot{y}_2 &= Q_1\,\frac{x_1-x_2}{\ell^2}, \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

όπου

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ είναι οι θέσεις των δύο δινών στο επίπεδο,
- Q_1, Q_2 είναι η κυκλοφορίες τους που δίνουν την ισχύ τους

και

$$\ell := \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \tag{1.6.2}$$

είναι η απόσταση μεταξύ των δινών. (Η λεπτομερής εξαγωγή αυτών των εξισώσεων ξεφεύγει από τους στόχους αυτών των σημειώσεων.)

Θα γράψουμε την παρακάτω συνάρτηση η οποία έχει μία ειδική σημασία σε αυτό το σύστημα:

$$V(\ell) = -Q_1 Q_2 \ln(\ell). \tag{1.6.3}$$

Η $V(\ell)$ εξαρτάται από τη σχετική θέση μεταξύ των δινών και έχει την ιδιότητα ότι διατηρείται κατά την κίνηση. Λέμε ότι η V δίνει το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός ζεύγους δινών και μάλιστα αποτελεί την ενέργεια του συστήματος. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι το σύστημα αυτό έχει μόνο δυναμική ενέργεια (η ενέργειά του δεν έχει κινητικό όρο) και αυτή προέρχεται από αλληλεπιδράσεις μεταξύ δινών.

Άσκηση 1.6.1. Γράψτε τις Εξ. (1.6.1) χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές μεταβλητές $z_k = x_k + iy_k,\ \ k = 1, 2$ [Υπόδειξη: δείτε το αποτέλεσμα στο βιβλίο P.K. Newton, "*The N-Vortex Problem*", *(Springer, 2001)*]. □

Άσκηση 1.6.2. Στην περίπτωση μαγνητικών δινών τα Q_1, Q_2 παίρνουν μόνο ακέραιες (ή ημιακέραιες) τιμές αλλά το δυναμικό αλληλεπίδρασης έχει τη μορφή

$$V(\ell) = \kappa_1 \kappa_2 \ln(\ell).$$

όπου κ_1, κ_2 είναι ακέραιοι αριθμοί (οι οποίοι σχετίζονται με ειδικότερα χαρακτηριστικά της δομής κάθε δίνης) γιά τους οποίους ισχύει $Q_i = \pm\kappa_i,\ i = 1, 2$. Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί είναι από φυσική άποψη πραγματοποιήσιμοι, άρα υπάρχουν τέσσερις δυνατές περιπτώσεις γιά τις δύο μαγνητικές δίνες με δεδομένα Q_1, Q_2. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης ώστε να διατηρείται η παραπάνω συνάρτηση ενέργειας.

1.6.2 Μία απομονωμένη δίνη

Ας περιοριστούμε σε αυτήν την παράγραφο στην περιγραφή μίας απομονωμένης δίνης με θέση (x, y). Αυτές μπορούμε να τις εξαγάγουμε από τις (1.6.1) θέτωντας $Q_2 = 0$ και ακολούθως (γιά την απλοποίηση του συμβολισμού) $Q = Q_1, x = x_1, y = y_1$. Οι εξισώσεις κίνησης γιά τις μεταβλητές x, y είναι

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0. \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν την μορφή ιδιαίτερα απλών νόμων διατήρησης. Οι λύσεις τους είναι $x =$ σταθ., $y =$ σταθ. και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι μία απομονωμένη δίνη (δηλαδή μία δίνη που δεν δέχεται δυνάμεις) είναι πάντα στάσιμη σε ένα ρευστό.

Οι απλοί αυτοί νόμοι διατήρησης βρίσκονται σε αντιστοιχία με τους νόμους διατήρησης γιά τα I_x, I_y στις Εξ. (1.5.1) γιά τους οποίους μιλήσαμε στην γενική εισαγωγή γιά τις δίνες. Αυτή είναι μία ισχυρή ένδειξη ότι το μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποδίδει καλά τις δυναμικές ιδιότητες των δινών.

Άσκηση 1.6.3. Γράψτε εξισώσεις κίνησης γιά μία μαγνητική δίνη σε εξωτερικό πεδίο. Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης γιά κάποια απλή μορφή του πεδίου. [Υπόδειξη: Προσθέσθε ένα νέο όρο δυναμικού στην ενέργεια και έναν όρο στις εξισώσεις ώστε να διατηρείται η νέα ενέργεια.]

1.6.3 Ζεύγος αλληλεπιδρώντων δινών: Διατηρήσιμες ποσότητες

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (1.6.1) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} Q_1\dot{x}_1 + Q_2\dot{x}_2 = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt}(Q_1x_1 + Q_2x_2) = 0 \\ Q_1\dot{y}_1 + Q_2\dot{y}_2 = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt}(Q_1y_1 + Q_2y_2) = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή, οι ακόλουθες είναι διατηρήσιμες ποσότητες:

$$I_x := Q_1x_1 + Q_2x_2, \qquad I_y := Q_1y_1 + Q_2y_2. \tag{1.6.5}$$

Παρατηρούμε ότι αυτές οι ποσότητες είναι ανάλογες των ποσοτήτων (1.5.1) οι οποίες δίνουν την θέση μίας δίνης στην μηχανική ρευστών και επίσης των (1.5.2) γιά την θέση μίας μαγνητικής δίνης. Άρα η απλοποιημένη θεωρία μας δίνει ένα από τα βασικά αποτελέσματα της πλήρους θεωρίας (είτε στην μηχανική ρευστών είτε στην θεωρία γιά μαγνητικά υλικά, είτε και σε άλλες θεωρίες). Πρέπει να είναι σαφές ότι οι ποσότητες (1.6.5) δίνουν την μέση θέση του ζεύγους των δινών και άρα έχουμε το αποτέλεσμα ότι η μέση αυτή θέση είναι μία σταθερά της κίνησης. (Πάντως, γιά να δίνουν με συνέπεια την μέση θέση των δινών θα πρέπει να κανονικοποιηθούν κατάλληλα όπως ζητάει η άσκηση στο τέλος της παραγράφου.)

Άσκηση 1.6.4. Με κατάλληλη κανονικοποίηση των σχέσεων (1.6.5) γράψτε ποσότητα η οποία να δίνει με συνέπεια έναν ορισμό της θέσης του ζεύγους δινών (αυτός ο ποσότητα που θα ορίσετε μπορεί να ονομαστεί *οδηγός της κίνησης*). Σε ποιά περίπτωση αυτό δεν είναι δυνατόν; Επίσης, τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε, από την διατήρηση του οδηγού της κίνησης, γιά την κίνηση κάθε μίας από τις δίνες;
Λύση. Γιά να ορίσουμε την θέση του συστήματος κανονικοποιούμε τις ποσότητες στην Εξ. (1.6.5) και έχουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$, όπου

$$R_x = \frac{I_x}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1x_1 + Q_2x_2}{Q_1 + Q_2}, \qquad R_y = \frac{I_y}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1y_1 + Q_2y_2}{Q_1 + Q_2}. \tag{1.6.6}$$

Αυτό λέγεται οδηγός της κίνησης γιά το ζεύγος δινών. Ο ορισμός του είναι ανάλογος του ορισμού κέντρου μάζας γιά ένα σύστημα υλικών σωμάτων.

Ο παραπάνω ορισμός είναι όμως αποδεκτός μόνο όταν $Q_1 + Q_2 = 0$. Η αστοχία του ορισμού γιά τον οδηγό κίνησης όταν $Q_1 + Q_2 = 0$ δείχνει ότι αυτή είναι μιά ειδική περίπτωση και θα πρέπει να μετεληθεί χωριστά.

Στροφορμή. Γιά το μοντέλο που μελετάμε είναι επίσης γνωστό ότι η ποσότητα

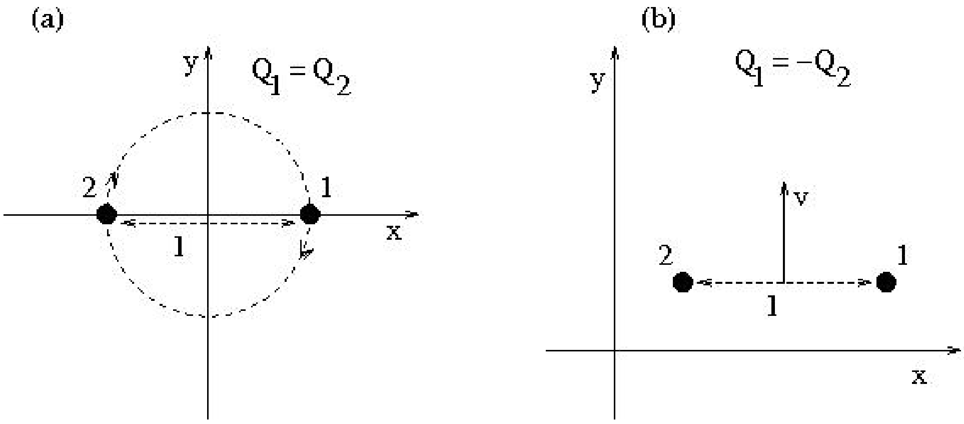
$$M = \frac{Q_1}{2}\,(x_1^2 + y_1^2) + \frac{Q_2}{2}\,(x_2^2 + y_2^2) \tag{1.6.7}$$

είναι διατηρήσιμη. Αυτό αποδεικνύεται με άμεσο υπολογισμό

$$\frac{dM}{dt} = Q_1(x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1) + Q_2(x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2) = 0$$

όπου γιά τις χρονικές παραγώγους χρησιμοποιήσαμε τις Εξ. (1.6.1).

Στα επόμενα θα μελετήσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τις διατηρήσιμες ποσότητες τις οποίες είδαμε σε αυτήν την παράγραφο.



Σχήμα 1.6: (a) Ένα ζεύγος δινών με $Q_1 = Q_2 = 1$ κάνει κυκλική κίνηση (σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή) με γωνιακή συχνότητα $\omega = 2/l^2$. (b) Ένα ζεύγος δινών με $Q_1 = -Q_2 = 1$ κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $v = 1/l$. (l είναι η απόσταση μεταξύ των δινών.)

1.6.4 Ζεύγος αλληλεπιδρώντων δινών: Τροχιές

Περίπτωση $Q_1 = Q_2 = 1$

Έχουμε τις ακόλουθες διατηρήσιμες ποσότητες

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\ln(\ell) \\
I_x &= x_1 + x_2 \\
I_y &= y_1 + y_2 \\
M &= \frac{1}{2}\,(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2).
\end{aligned}$$

Οι I_x και I_y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και επίσης η τιμή τους μπορεί να αλλάξει με απλή μετάθεση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων. Εκλέγουμε λοιπόν την αρχή του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε $I_x = 0$, $I_y = 0$. Ώστε έχουμε τις

$$x_2 = -x_1, \qquad y_2 = -y_1. \tag{1.6.8}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\mathcal{E} = -\ln(\ell) \Rightarrow \ell = \ell_0 \ (= const.). \tag{1.6.9}$$

Με τη βοήθεια όμως των (1.6.8) η απόσταση μεταξύ των δύο δινών γράφεται

$$\ell = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Άσκηση 1.6.5. Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής δεν δίνει επιπλέον αποτελέσματα από τα παραπάνω.
Λύση. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (1.6.8) γράφουμε την στροφορμή ως

$$M = x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{4}\,\ell^2.$$

Άρα έχουμε $M : const \Rightarrow \ell = \ell_0 \ (= const.)$, δηλαδή βρίσκουμε ένα αποτέλεσμα το οποίο ήδη γνωρίζουμε. □

Συμπερασματικά, η Εξ. (1.6.8) δείχνει ότι οι δίνες βρίσκονται (γιά όλους τους χρόνους) σε αντιδιαμετρικές θέσεις ως προς ένα σημείο το οποίο έχει εκλεγεί ως αρχή των αξόνων. Η Εξ. (1.6.9) δείχνει ότι κινούνται σε κύκλο με διάμετρο ℓ_0 (και κέντρο την αρχή των αξόνων).

Γιά να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε τις δύο από τις Εξ. (1.6.1) γιά τις μεταβλητές x_1, y_1 και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις τις οποίες βρήκαμε από τους νόμους διατήρησης. Έτσι, βρίσκουμε γιά τη θέση (x_1, y_1) τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= Q_2\,\frac{x_2 - x_1}{\ell^2} \Rightarrow \dot{y}_1 = -\frac{2x_1}{\ell_0^2} \\ \dot{x}_1 &= Q_2\,\frac{y_1 - y_2}{\ell^2} \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{2y_1}{\ell_0^2} \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της πρώτης και χρησιμοποιώντας την δεύτερη βρίσκουμε

$$\ddot{y}_1 = -\frac{2}{\ell_0^2}\dot{x}_1 \Rightarrow \ddot{y}_1 + \frac{4}{\ell_0^4}y_1 = 0. \tag{1.6.11}$$

Μία ανάλογη εξίσωση μπορούμε να εξάγουμε και γιά την x_1. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν περιοδική κίνηση με συχνότητα

$$\omega = \frac{2}{\ell_0^2}. \tag{1.6.12}$$

Άρα τα φορτία κινούνται σε κυκλική τροχιά με γωνιακή συχνότητα αντιστόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους αποστάσεως.

Άσκηση 1.6.6. Έστω δίνες με $Q_1 = Q_2 = 1$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Βρείτε την τροχιά τους.

Άσκηση 1.6.7. Δείξτε ότι γιά $Q_1 \neq 0 \neq Q_2$ οι Εξ. (1.6.1) δεν έχουν στατικές λύσεις, δηλ., δεν έχουν λύσεις της μορφής $(x_1, y_1) = const.$, $(x_2, y_2) = const.$

Άσκηση 1.6.8. Γράψτε τις Εξ. (1.6.1) σε πολικές συντεταγμένες γιά $Q_1 = Q_2$. Βρείτε τη γωνιακή συχνότητα περιστροφής του ζεύγους.

Περίπτωση $Q_1 = -Q_2 = 1$

Έχουμε τις ακόλουθες διατηρήσιμες ποσότητες

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \ln(\ell) \\
I_x &= x_1 - x_2 \\
I_y &= y_1 - y_2 \\
M &= \frac{1}{2}\,[(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)].
\end{aligned}$$

Με κατάλληλη στροφή του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να εκλέξουμε τον άξονα x να είναι παράλληλος στην ευθεία που περνάει από τις δύο δίνες και τον άξονα y κάθετα στην γραμμή που ενώνει τις δύο δίνες. Έτσι μπορούμε να επιτύχουμε την

$$y_1 = y_2 \Rightarrow I_y = 0. \tag{1.6.13}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\ell = \sqrt{I_x^2 + I_y^2},$$

άρα η απόσταση ℓ μεταξύ των δινών είναι σταθερή (έστω $\ell = \ell_0$). Αυτό δείχνει επίσης ότι η πρώτη διατηρήσιμη ποσότητα (γιά το $\mathcal{E}$) περιέχεται στις δύο επόμενες. Μάλιστα, αφού έχουμε εκλέξει $I_y = 0$ έχουμε

$$\ell^2 = \ell_0^2 = I_x^2.$$

Γιά την τελευταία διατηρήσιμη ποσότητα, την στροφορμή, έχουμε

$$M = \frac{1}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{2}\,(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \frac{I_x}{2}\,(x_1 + x_2),$$

ώστε η $x_1 + x_2$ είναι επίσης διατηρήσιμη ποσότητα. Άρα έχουμε

$$x_1 - x_2 = const., \quad x_1 + x_2 = const. \Rightarrow x_1 = const., \quad x_2 = const. \tag{1.6.14}$$

δηλ., οι συντεταγμένες x_1, x_2 είναι σταθερές κατά την διάρκεια της κίνησης.

Συμπερασματικά, η Εξ. (1.6.14) δείχνει ότι κάθε μία από το ζεύγος δινών δεν κινείται κατά τον άξονα x (δηλ., κατά την διεύθυνση της γραμμής που τις συνδέει) και άρα είναι δυνατόν να κινούνται μόνο κατά την κατεύθυνση y (δηλ., κάθετα στην γραμμή που τις συνδέει).

Γιά να βρούμε την ταχύτητα κίνησης του ζεύγους εργαζόμαστε ως εξής. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι $v = \dot{y}_1 = \dot{y}_2$ (αφού $y_1 = y_2$). Οπότε από την δεύτερη Εξ. (1.6.1) έχουμε

$$\dot{y}_2 = Q_1\,\frac{x_1 - x_2}{\ell^2} \Rightarrow v = \frac{I_x}{\ell_0^2} \Rightarrow v = \frac{1}{I_x} \;\text{ ή }\; v = \pm\frac{1}{\ell_0}.$$

Η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της (σταθερής) απόστασης μεταξύ των δινών και είναι θετική ή αρνητική (προς τον θετικό ή αρνητικό άξονα y αντίστοιχα) αναλόγως με το πρόσημο της ποσότητας $I_x = x_1 - x_2$.

Άσκηση 1.6.9. Έστω δίνες με $Q_1 = -Q_2 = 1$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Λύστε τις εξισώσεις κίνησης και έτσι βρείτε την τροχιά τους.

Άσκηση 1.6.10. Θεωρήστε δύο δίνες με ισχύες $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0$ και $|\Gamma_1| \neq |\Gamma_2|$. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. (β) Βρείτε αναλυτικά την τροχιά τους (χρησιμοποιήστε τις διατηρήσιμες ποσότητες).

Λύση. (α) Εξ. κίνησης

$$\dot{x}_1 = Q_2\,\frac{y_1 - y_2}{\ell^2}, \qquad \dot{y}_1 = Q_2\,\frac{x_2 - x_1}{\ell^2},$$
$$\dot{x}_2 = Q_1\,\frac{y_2 - y_1}{\ell^2}, \qquad \dot{y}_2 = Q_1\,\frac{x_1 - x_2}{\ell^2},$$

όπου $\ell = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

(β) Διατηρήσιμες ποσότητες

$$I_x = Q_1 x_1 + Q_2 x_2$$
$$I_y = Q_1 y_1 + Q_2 y_2$$

όπου τα I_x, I_y θεωρούνται σταθερές. Λύνουμε τις παραπάνω και παίρνουμε:

$$x_2 = \frac{I_x}{Q_2} - \frac{Q_1}{Q_2}x_1, \qquad y_2 = \frac{I_y}{Q_2} - \frac{Q_1}{Q_2}y_1. \tag{1.6.15}$$

Επίσης, από την διατήρηση της ενέργειας $W = -Q_1 Q_2 \ln(\ell)$ προκύπτει ότι $\ell = \ell_0$ (σταθερό), και μπορούμε να γράψουμε

$$\ell_0^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Αντικαθιστούμε τις Εξ. (1.6.15) στην τελευταία και βρίσκουμε

$$\left[\left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right) x_1 - \frac{I_x}{Q_2}\right]^2 + \left[\left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right) y_1 - \frac{I_y}{Q_2}\right]^2 = \ell_0^2 \Rightarrow$$
$$[(Q_1 + Q_2)x_1 - I_x]^2 + [(Q_1 + Q_2)y_1 - I_y]^2 = Q_2^2\,\ell_0^2 \Rightarrow$$
$$\left[x_1 - \frac{I_x}{Q_1 + Q_2}\right]^2 + \left[y_1 - \frac{I_y}{Q_1 + Q_2}\right]^2 = \left(\frac{Q_2\,\ell_0}{Q_1 + Q_2}\right)^2.$$

Δηλαδή, έχουμε γιά την δίνη Q_1 κίνηση επάνω σε κύκλο με κέντρο το guiding center

$$R_x = \frac{I_x}{Q_1 + Q_2}, \qquad R_y = \frac{I_y}{Q_1 + Q_2}$$

και ακτίνα $A_1 = Q_2\ell_0/(Q_1 + Q_2)$. Σε συμπαγή μορφή:

$$(x_1 - R_x)^2 + (y_1 - R_y)^2 = A_1^2.$$

Ομοίως, γιά την δίνη Q_2 βρίσκουμε

$$(x_2 - R_x)^2 + (y_2 - R_y)^2 = A_2^2,$$

όπου $A_2 = Q_1\ell_0/(Q_1 + Q_2)$.

Εναλλακτική αντιμετώπιση: Αντικαθιστώντας τις Εξ. (1.6.15) στις εξισώσεις κίνησης βρίσκουμε ότι το (x_1, y_1) κάνει κυκλική κίνηση με κέντρο το guiding center

$$R_x := \frac{Q_1 x_1 + Q_2 x_2}{Q_1 + Q_2}, \qquad R_y := \frac{Q_1 y_1 + Q_2 y_2}{Q_1 + Q_2}$$

και γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \frac{Q_1 + Q_2}{\ell_0^2}.$$

Από τις Εξ. (1.6.15) βρίσκουμε

$$x_1 - R_x = \frac{Q_2}{Q_1+Q_2}\,(y_1 - y_2), \qquad y_1 - R_y = \frac{Q_2}{Q_1+Q_2}\,(x_1 - x_2)$$

άρα η ακτίνα A_1 της κυκλικής κίνησης γιά την δίνη Q_1 είναι

$$A_1^2 = (x_1 - R_x)^2 + (y_1 - R_y)^2 = \left(\frac{Q_2}{Q_1+Q_2}\right)^2 \left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right] = \left(\frac{Q_2\,\ell_0}{Q_1+Q_2}\right)^2.$$

Μπορούμε με ανάλογο τρόπο να βρούμε γιά την δίνη Q_2 κυκλική κίνηση με το ίδιο κέντρο και συχνότητα και με ακτίνα

$$A_2 = \frac{Q_1\,\ell_0}{Q_1+Q_2}.$$

1.6.5 N αλληλεπιδρώσες δίνες

Θα μελετήσουμε ένα σύστημα από N δίνες με ισχύες $Q_i,\ i=1,\ldots,N$, οι οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η θέση κάθε δίνης είναι $(x_i, y_i),\ i=1,\ldots,N$, ώστε χρειαζόμαστε $2N$ μεταβλητές γιά την πλήρη περιγραφή του συστήματος. Θεωρούμε ότι οι δίνες αλληλεπιδρούν κατά ζεύγη με δυναμικό της μορφής (1.6.3). Ώστε, για το πλήρες σύστημα, θεωρούμε ένα δυναμικό αλληλεπίδρασης το οποίο είναι γενίκευση του (1.6.3):

$$V = -\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{j=1, j\neq i}^{N} Q_i Q_j\ \ln(\ell_{ij}), \tag{1.6.16}$$

όπου $\ell_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο τυχόντων δινών i και j. Στο παραπάνω διπλό άθροισμα, εννοείται ότι εξαιρείται ο όρος γιά $i = j$ (δεν υπάρχει αυτοαλληλεπίδραση κάθε δίνης με τον εαυτό της).

Οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφού σε αναλογία με το σύστημα εξισώσεων (1.6.1) γιά ζεύγος δινών, είτε και με το σύστημα (1.4.1) γιά ζεύγος ηλεκτρικών φορτίων. Στην τελευταία περίπτωση, θα πρέπει να θέσουμε $m = 0$ γιά να πάρουμε την περίπτωση δινών. Έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} Q_i \dot{x}_i &= -\frac{\partial V}{\partial y_i} \Rightarrow \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j \frac{y_i - y_j}{\ell_{ij}^2} \\ Q_i \dot{y}_i &= \frac{\partial V}{\partial x_i} \Rightarrow \dot{y}_i = -\sum_{j=1}^{N} Q_j \frac{x_i - x_j}{\ell_{ij}^2}, \end{aligned} \qquad i = 1,\ldots,N. \tag{1.6.17}$$

1.7 Εργαστηριακή άσκηση

Θεωρήστε ένα σύστημα είτε (α) δύο φορτίων q_1, q_2 σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είτε (β) δύο δινών Q_1, Q_2 (μπορείτε να επιλέξετε ένα από τα δύο). Θεωρήστε δυναμικό αλληλεπίδρασης $V = -q_1 q_2 \ln(\ell)$, όπου ℓ η απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων ή δινών.
(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης.
(β) Γράψτε τις διατηρήσιμες ποσότητες και δείξτε πώς αυτές προκύπτουν από τις εξισώσεις κίνησης.
(γ) Γράψτε κώδικα ο οποίος να επιλύει το πρόβλημα αρχικών τιμών γιά το σύστημα των εξισώσεων.
(δ) Σχεδιάστε τις τροχιές του συστήματος γιά μία περίπτωση όπου $q_1 \neq q_2$ ή $Q_1 \neq Q_2$.
(ε) Σχεδιάστε τις συντεταγμένες κάθε φορτίου ή δίνης με τον χρόνο.
(ζ) Δείτε ότι στον αριθμητικό σας υπολογισμό οι ποσότητες οι οποίες είναι διατηρήσιμες, πραγματικά διατηρούνται.

Βιβλιογραφία

[1] N. D. Fowkes and J. J. Mahoney, *"An introduction to mathematical modeling"* (John Wiley,1994).

[2] J.D. Logan, *"Εφαρμοσμένα Μαθηματικά"* (ΠΕΚ, 1997).

[3] J.D. Logan, *"Applied Mathematics"* (John Wiley, 1987).

[4] B. Barnes and G. R. Fulford, *"Mathematical Modelling with Case Studies"* (CRC Press, 2009).

[5] G.R. Fowles, *"Analytical mechanics"* (CBS College Publishing, 1986).

[6] H. Goldstein, *"Classical Mechanics"* (Addison Wesley, 1980).

[7] Ι. Δ. Χατζηδημητρίου, *"Θεωρητική μηχανική"*, 3η έκδοση (Γιαχούδη-Γιαννούλη, Θεσσαλονίκη, 2000).

[8] Lawrence Perko, *"Differential Equations and Dynamical Systems"*, Third edition (Springer, New York, 2001).

[9] D.W. Jordan and P. Smith, *"Nonlinear ordinary differential equations"* (Oxford University Press, 1987).

[10] Τάσος Μούντης, *"Μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις"* (Εκδοσεις Πνευματικού, 1997).

[11] J.D. Murray, *"Mathematical Biology"*, *Vol I* (Springer, Berlin Heidelberg, 2002).

[12] A. Hastings, *"Populations Biology"* (Springer, New York, 1997).

[13] D. Griffiths, *"Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική"* (ΠΕΚ, 1996).

[14] P.G. Saffman, "*Vortex Dynamics*", (Cambridge University Press, 1992).

[15] H. Aref, *Point vortex dynamics: A classical mathematics playground*, J. Math. Phys. **48**, 065401 (2007).

[16] P.K. Newton, *The N-Vortex Problem*, (Springer, 2001).