# Κεφάλαιο 2

# Δυναμικά συστήματα

## 2.1 Χώρος φάσεων

### 2.1.1 Εισαγωγή

Οι λύσεις των συστημάτων εξισώσεων τα οποία είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα είναι της μορφής $x = x(t),\ y = y(t)$ και δίνουν τους πληθυσμούς δύο ειδών σαν συνάρτηση του χρόνου. Ας μελετήσουμε σε κάποια μεγαλύτερη γενικότητα συστήματα τέτοιων εξισώσεων. Ξεκινάμε θεωρώντας το απλό παράδειγμα

$$\frac{dx}{dt} = by, \qquad \frac{dy}{dt} = -ax, \qquad a, b > 0.$$

Γιά να βρούμε τα σημεία ισορροπίας θέτουμε $dx/dt = 0$, $dy/dt = 0$ και βρίσκουμε

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

δηλαδή, το το $(x, y) = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Αν επεκταθούμε πέραν του σημείου ισορροπίας τότε οι πληθυσμοί θα εξελίσσονται στον χρόνο και γιά κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να ορίσουμε στο επίπεδο $xy$ το σημείο $(x(t), y(t))$. Αυτά τα σημεία είναι χρήσιμα διότι συμβαίνει πολλές φορές να ενδιαφερόμαστε γιά την σχέση του ενός πληθυσμού με τον άλλον αφήνοντας σε δεύτερη μοίρα την ακριβή εξέλιξή του καθενός με τον χρόνο. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε το επίπεδο $xy$ το οποίο ονομάζουμε χώρο των φάσεων. Κάθε σημείο στον χώρο των φάσεων παριστάνει μία κατάσταση του συστήματος (π.χ., στην περίπτωση των μοντέλων που περιγράφουν την εξέλιξη πληθυσμού δύο ειδών, περιγράφει έναν συγκεκριμένο συνδυασμό πληθυσμών). Είναι απλό να φανταστούμε ότι με την εξέλιξη του χρόνου $t$ το αντίστοιχο σημείο $(x(t), y(t))$ διαγράφει μία καμπύλη στο χώρο των φάσεων. Μάλιστα, το διάνυσμα $(x(t), y(t))$ δίνει την παραμετρική αναπαράσταση αυτής της καμπύλης.

Γενικότερα, οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων περιγράφονται από οικογένειες καμπυλών του χώρου των φάσεων. Μπορούμε να εξαγάγουμε μία εξίσωση γιά τις καμπύλες. Ας θεωρήσουμε τα σημεία στα οποία η παράγωγος $x'(t) \neq 0$, τότε μπορούμε να αντιστρέψουμε την συνάρτηση και να πάρουμε $t = t(x)$ σε περιοχή γύρω από αυτά τα σημεία. Ώστε θα έχουμε τις καμπύλες $y = y(t(x))$. Ο κανόνας της αλυσίδας μας δίνει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

**Παράδειγμα 2.1.1.** Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -ax, \qquad a > 0. \tag{2.1.1}$$

Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων βρίσκονται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{y},$$

η οποία λύνεται με χωρισμό μεταβλητών:

$$\int y\,dy = -\int ax\,dx \Rightarrow ax^2 + y^2 = C. \tag{2.1.2}$$

Το $C$ μπορεί να πάρει, κατ' αρχήν, οποιαδήποτε τιμή. Για $C = 0$ η Εξ. (2.1.2) ικανοποιείται μόνο γιά το σημείο ισορροπίας $(0,0)$. Γιά κάθε τιμή $C > 0$ παίρνουμε ελλείψεις που περικλείουν το σημείο ισορροπίας. Άρα, λέμε ότι οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων είναι ελλείψεις. Τέλος γιά $C < 0$ η Εξ. (2.1.2) δεν ικανοποιείται γιά κανένα σημείο $(x,y)$. □

**Παράδειγμα 2.1.2.** Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = ax, \qquad a > 0. \tag{2.1.3}$$

Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων βρίσκονται από την

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int ax\,dx \Rightarrow ax^2 - y^2 = C. \tag{2.1.4}$$

Γιά κάθε τιμή $C > 0$ παίρνουμε υπερβολές οι οποίες τέμνουν τον άξονα $x$. Γιά κάθε τιμή $C < 0$ παίρνουμε υπερβολές οι οποίες τέμνουν τον άξονα $y$. Τέλος γιά $C = 0$ η Εξ. (2.1.2) δίνει $y = \pm\sqrt{a}\,x$, δηλαδή δύο ευθείες οι οποίες τέμνονται στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$. □

### 2.1.2 Συστήματα δύο εξισώσεων 1ης τάξης

Τα συστήματα τα οποία έχουμε μελετήσει είναι συστήματα δύο εξισώσεων πρώτης τάξης. Συστήματα εξισώσεων πρώτης τάξης, προκύπτουν σαν μοντέλα συστημάτων στην μηχανική, βιολογία, χημεία και αλλού. Η γενικής τους μορφή είναι

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x,y) \\ \dot{y} &= Y(x,y). \end{aligned}$$

Ας συνοψίσουμε τα βασικά σημεία τα οποία μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε σε τέτοια συστήματα:
(α) Τα σημεία ισορροπίας, δηλαδή, τα σημεία στα οποία

$$X(x,y) = 0, \qquad Y(x,y) = 0.$$

(β) Το διάγραμμα φάσεων, οι καμπύλες του οποίου δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}.$$

(γ) Οι λύσεις του συστήματος

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

*Βιβλιογραφία:* [9, 8]

## 2.2 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Η μελέτη συστημάτων εξισώσεων αρχίζει από τα πιό απλά συστήματα που είναι τα γραμμικά. Εάν γιά μία μεταβλητή ο ρυθμός αύξησής της είναι ανάλογος της τιμής της, τότε η δυναμική της περιγράφεται από την γραμμική εξίσωση

$$\dot{x} = ax \Rightarrow x(t) = c\, e^{at},$$

το οποίο έχουμε δει ότι είναι ένα απλό μοντέλο για αύξηση πληθυσμού.

### 2.2.1 Συστήματα με δύο μεταβλητές

Ένα γραμμικό σύστημα με δύο μεταβλητές έχει την γενική μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Το σημείο ισορροπίας βρίσκεται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

εκτός εάν η ορίζουσα των συντελεστών στις παραπάνω εξισώσεις είναι μηδέν.

Βρίσκουμε λύσεις των Εξ. (2.2.1) δοκιμάζοντας την μορφή

$$x = r\, e^{\lambda t}, \quad y = s\, e^{\lambda t}, \tag{2.2.2}$$

όπου $r, s, \lambda$ είναι σταθερές. Αντικατάσταση στις (2.2.1) δίνει τις

$$\begin{aligned} (a-\lambda)r + bs &= 0 \\ cr + (d-\lambda)s &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Θεωρούμε ως αγνώστους τους $r, s$ και ζητάμε να μηδενίζεται η ορίζουσα του συστήματος, ώστε το σύστημα να έχει λύσεις πέραν της τετριμμένης $(r, s) = (0, 0)$. Η συνθήκη είναι

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0. \tag{2.2.4}$$

Η τελευταία λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* του συστήματος και στην περίπτωση μας έχει δύο λύσεις $\lambda_1, \lambda_2$. Για κάθε τιμή του $\lambda$ οι εξισώσεις (2.2.3) δίνουν τη σχέση μεταξύ $r$ και $s$.

Η γενική λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων που βρήκαμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1\, e^{\lambda_1 t} + r_2\, e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= s_1\, e^{\lambda_1 t} + s_2\, e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Θα επαναλάβουμε τώρα την παραπάνω διαδικασία σε μια διαφορετική γλώσσα. Το γραμμικό σύστημα (2.2.1) γράφεται στην μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2.2.5}$$

Έχουμε το διάνυσμα των αγνώστων

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.2.6}$$

και τον πίνακα του συστήματος

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{2.2.7}$$

Ώστε, το γραμμικό σύστημα γράφεται στη μορφή

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}. \tag{2.2.8}$$

Οι παραπάνω συμβολισμοί θα πρέπει να μας βοηθήσουν καθώς μας θυμίζουν μορφές γνωστές από την γραμμική άλγεβρα.

Ας θεωρήσουμε τη μορφή (2.2.2) την οποία γράφουμε

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\,\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \tag{2.2.9}$$

όπου $\boldsymbol{v}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Παρατηρούμε ότι

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\boldsymbol{v}\right) = \lambda\, e^{\lambda t}\boldsymbol{v} \tag{2.2.10}$$

και

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\left(e^{\lambda t}\boldsymbol{v}\right) = e^{\lambda t}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}. \tag{2.2.11}$$

Αντικατάσταση των δύο τελευταίων σχέσεων στην (2.2.8) δίνει το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad ή \quad \lambda \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix},$$

άρα τα εκθετικά $\lambda$ είναι οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα $2 \times 2$ του συστήματος και οι λύσεις γιά τα $(r, s)$ είναι τα ιδιοδιανύσματά του.

### 2.2.2 Πραγματικές ιδιοτιμές

Ας δούμε πρώτα την περίπτωση που οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές (δηλαδή, ο πίνακας του συστήματος έχει πραγματικές ιδιοτιμές).

**Παράδειγμα 2.2.1.** (σάγμα) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 3y \\ \dot{y} &= 2y. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε λύσεις δοκιμάζοντας τη μορφή

$$x = r\,e^{\lambda t}, \quad y = s\,e^{\lambda t}.$$

Αντικαθιστούμε στο σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε

$$(\lambda + 1)\,r + 3\,s = 0, \qquad (\lambda - 2)\,s = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -1,\ \lambda = 2.$$

Για $\lambda = -1$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $(r, s) = (1, 0)$ και γιά $\lambda = 2$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $(r, s) = (1, -1)$. Ας ονομάσουμε $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ και

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{2.2.12}$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t}\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, e^{\lambda_2 t}\, \boldsymbol{v}_2 \tag{2.2.13}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1\, e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Σε αναλυτικότερη μορφή:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} \\ y(t) &= -c_2\, e^{2t} \end{aligned}$$

όπου $c_1, c_2$ είναι σταθερές.

Μπορούμε να δούμε κάποιες ειδικές ενδιαφέρουσες λύσεις. Αν έχουμε αρχική συνθήκη $(x, y)(t = 0) = (1, 0)$ τότε βρίσκουμε την λύση του συστήματος θέτοντας $c_1 = 1, c_2 = 0$ στη γενική λύση. Έχουμε ειδική λύση $(x, y)(t) = (1, 0)e^{-t}$, η οποία, πραγματικά, ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Με τον διανυσματικό συμβολισμό έχουμε ότι, γιά αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}(t = 0) = \boldsymbol{v}_1$ έχουμε λύση $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}_1\, e^{-t}$. Με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε ότι γιά αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}(t = 0) = \boldsymbol{v}_2$ έχουμε λύση $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}_1\, e^{-2t}$. □

Είδαμε ότι αν η αρχικές συνθήκες δίνονται από τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, τότε η λύση του συστήματος παραμένει επάνω στην ευθεία που ορίζει το κάθε ιδιοδιάνυσμα. Το ίδιο συμβαίνει φυσικά και αν οι αρχικές συνθήκες δίνονται από πολλαπλάσια των ιδιοδιανυσμάτων $c\boldsymbol{v}_1, c\boldsymbol{v}_2$. Δηλαδή, οι ευθείες που ορίζουν τα ιδιοδιανύσματα αποτελούν κάποιες ειδικές περιοχές του χώρου φάσεων.

Όταν το σύστημα βρίσκεται στην ευθεία του $\boldsymbol{v}_1$, το οποίο αντιστοιχεί σε αρνητική ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, θα πλησιάζει την αρχή των αξόνων κινούμενο επάνω σε αυτή την ευθεία (όπου βρίσκεται το σημείο ισορροπίας) όταν ο χρόνος πηγαίνει προς το άπειρο. Όταν το σύστημα βρίσκεται στην ευθεία του $\boldsymbol{v}_2$, το οποίο αντιστοιχεί σε θετική ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, θα απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων κινούμενο επάνω σε αυτή την ευθεία όταν ο χρόνος πηγαίνει προς το άπειρο.

Συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες $c\,\boldsymbol{v}_1 = c(1, 0)$ και $c\boldsymbol{v}_2 = c(1, -1)$ είναι δύο καμπύλες του χώρου φάσεων. Η φορά της κίνησης είναι προς την αρχή των αξόνων για την ευθεία $c(1, 0)$ ενώ γιά την κίνηση στην ευθεία $c(-1, 1)$ έχουμε απομάκρυνση από την αρχή των αξόνων.

**Παρατήρηση 2.2.1** *Γιά ένα σύστημα με πραγματικές ιδιοτιμές, οι ευθείες που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα αποτελούν καμπύλες του χώρου φάσεων.*

Μπορούμε να σχεδιάσουμε ποιοτικά όλες τις υπόλοιπες καμπύλες του διαγράμματος εάν σκεφτούμε ότι πρέπει να υπάρχει συνέχεια με τις δύο ευθείες των ιδιοδιανυσμάτων.

**Παρατήρηση 2.2.2** *Ένα σημείο ισορροπίας με δύο πραγματικές ετερόσημες ιδιοτιμές λέγεται σαγματικό σημείο και είναι ένα ασταθές σημείο ισορροπίας.*

**Παράδειγμα 2.2.2.** (κόμβος) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= 3x - 4y \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \tag{2.2.15}$$

με λύσεις $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1 = (1,1),\ \vec{v}_2 = (2,3)$.

Η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\, e^{-t} + 2c_2\, e^{-2t}, \\ y(t) &= c_1\, e^{-t} + 3c_2\, e^{-2t}. \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

*Σχεδίαση διαγράμματος φάσεων.*

Παρατηρούμε ότι η γενική λύση δίνει, γιά κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$(x,y) \to (0,0), \qquad \text{όταν } t \to \infty \tag{2.2.17}$$

δηλαδή, η κατάσταση του συστήματος τείνει, γιά κάθε περίπτωση, προς το σημείο ισορροπίας γιά μεγάλους χρόνους ($t \to \infty$). Μπορούμε επίσης να πούμε ότι όλες οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων καταλήγουν στην αρχή των αξόνων, δηλαδή, στο σημείο ισορροπίας.

Γιά να καταλάβουμε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των καμπυλών του διαγράμματος φάσεων σχηματίζουμε τον λόγο

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{c_1\, e^{-t} + 2c_2\, e^{-2t}}{c_1\, e^{-t} + 3c_2\, e^{-2t}}. \tag{2.2.18}$$

Μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και προνομαστή με $e^{-t}$ ώστε έχουμε

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{c_1 + 2c_2\, e^{-t}}{c_1 + 3c_2\, e^{-t}}. \tag{2.2.19}$$

Βλέπουμε ότι ισχύει

$$\frac{x(t)}{y(t)} = 1, \qquad \text{γιά} \quad t \to \infty. \tag{2.2.20}$$

Αν σχεδιάσουμε μία οποιαδήποτε καμπύλη στο διάγραμμα φάσεων, αυτή θα πρέπει να πλησιάζει προς την αρχή των αξόνων (δηλαδή, προς το σημείο ισορροπίας) κατά την διεύθυνση της ευθείας $y = x$. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι η ευθεία $y = x$ θα είναι εφαπτομένη κάθε καμπύλης του διαγράμματος φάσεων στο σημείο $(0,0)$.

Ακολούθως, μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και προνομαστή με $e^{-2t}$ ώστε έχουμε

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{c_1\, e^{t} + 2c_2}{c_1\, e^{t} + 3c_2}. \tag{2.2.21}$$

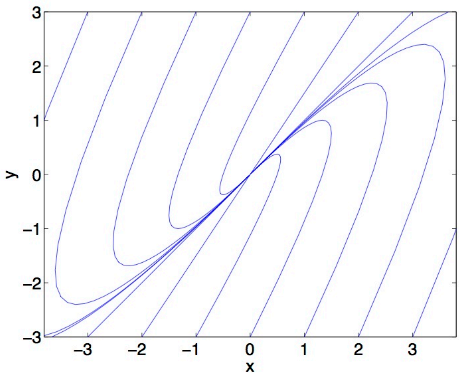
Βλέπουμε ότι ισχύει

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{2}{3}, \qquad \text{γιά} \quad t \to -\infty. \tag{2.2.22}$$

Άρα, η εφαπτομένη στις φασικές καμπύλες γιά χρόνους $t \to -\infty$ είναι παράλληλες στην ευθεία που ορίζει το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_2 = (2,3)$.

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι όλες οι φασικές καμπύλες είναι παράλληλες με την ευθεία που ορίζει το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = (1,1)$ της μικρότερης (κατ΄ απόλυτη τιμή) ιδιοτιμής γιά μεγάλους χρόνους ($t \to -\infty$), ενώ είναι παράλληλες με το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_2 = (2,3)$ της μεγαλύτερης (κατ΄ απόλυτη τιμή) ιδιοτιμής γιά χρόνους $t \to -\infty$. Με βάση αυτή την παρατήρηση μπορούμε να σχεδιάσουμε ποιοτικά τις φασικές καμπύλες. □

**Παρατήρηση 2.2.3** *Ένα σημείο ισορροπίας με δύο πραγματικές ομόσημες ιδιοτιμές λέγεται κόμβος. Όταν οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα) έχουμε έναν ευσταθή κόμβο. Στην αντίθετη περίπτωση (δύο θετικές ιδιοτιμές) ο κόμβος είναι ασταθής.*




Σχήμα 2.1: Κόμβος.

### 2.2.3 Γενική θεωρία: Διαγωνοποίηση

Το γραμμικό σύστημα (2.2.1) που μελετάμε μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} := (x_1, x_2),$$

όπου $A$ είναι ο πίνακας $2 \times 2$ των συντελεστών (όπως και στην Εξ. (2.2.5)). Γιά την μελέτη αυτού του πίνακα, αλλά και γενικότερα πινάκων $n \times n$, ανακαλούμε ένα σημαντικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας.

**Θεώρημα 1** *Εάν οι ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *ενός πίνακα* $A$ *διάστασεων* $n \times n$ *είναι πραγματικές και διάκριτες, τότε οποιοδήποτε σύνολο των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ *είναι βάση του* $\boldsymbol{R}^n$*, ο πίνακας* $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ *είναι αντιστρέψιμος και*

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Για να βρούμε *την γενική λύση* του γραμμικού συστήματος ορίζουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών

$$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x},$$

γιά το οποίο έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{y}} = P^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}.$$

Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\boldsymbol{y}.$$

Η γενική λύση είναι

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]\,\boldsymbol{y}(0),$$

όπου $\boldsymbol{y}(0)$ είναι η αρχικές συνθήκες εκφρασμένες στις μεταβλητές $\boldsymbol{y}$. Τελικά, στις αρχικές μεταβλητές έχουμε την γενική λύση

$$\boldsymbol{x}(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}\boldsymbol{x}(0),$$

όπου $\boldsymbol{x}(0)$ είναι η αρχικές συνθήκες.

**Παρατήρηση 2.2.4** *Δεδομένου ότι συνήθως μελετάμε συστήματα δύο εξισώσεων είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ότι για έναν* $2 \times 2$ *πίνακα* $P$ *ο αντίστροφος* $P^{-1}$ *είναι*

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

*όπου* $\Delta = ad - bc$ *η ορίζουσα.*

**Παράδειγμα 2.2.3.** (σαγματικό σημείο) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2\\ \dot{x}_2 &= 2x_2\end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ και δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

'Εχουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1\\ \dot{y}_2 &= 2y_2\end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$. Η γενική λύση του είναι $y_1(t) = c_1 e^{-t}$, $y_2(t) = c_2 e^{2t}$ ή σε άλλη μορφή

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}(0).$$

(Όπου θέσαμε $y_1(0) = c_1,\ y_2(0) = c_2$.)

Τελικά έχουμε

$$\boldsymbol{x}(t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1}\, \boldsymbol{x}(0) \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_1(0)e^{-t} + x_2(0)(e^{-t} - e^{2t}) \\ x_2(t) = x_2(0)e^{2t} \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα φάσης στα επίπεδα $(y_1, y_2)$ και $(x_1, x_2)$. Έχουμε ένα *σαγματικό σημείο*.

### 2.2.4 Μιγαδικές ιδιοτιμές

Ας δούμε τώρα την περίπτωση που οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές (δηλαδή, ο πίνακας του συστήματος έχει μιγαδικές ιδιοτιμές).

**Παράδειγμα 2.2.4.** Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - bx_2\\ \dot{x}_2 &= bx_1 + ax_2\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - a)^2 + b^2 = 0, \Rightarrow \lambda = a \pm ib.$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(1, \mp i)$. Άρα

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r_1 e^{(a+ib)t} + r_2 e^{(a-ib)t} = e^{at}[r_1 e^{ibt} + r_2 e^{-ibt}] \\ x_2(t) &= -ir_1 e^{(a+ib)t} + ir_2 e^{(a-ib)t} = e^{at}\frac{1}{i}[r_1 e^{ibt} - r_2 e^{-ibt}] \end{aligned}$$

Έστω $r_2^*$ ο μιγαδικός συζηγής του $r_2$. Εκλέγουμε $r_2^* = r_1$ και $r_1 := c_1/2 + ic_2/2$ όπου $c_1, c_2 \in R$, ώστε να πετύχουμε πραγματική λύση (αφού σε όλα το παρόν κεφάλαιο υποθέτουμε ότι τα $x, y$ είναι πραγματικές μεταβλητές). Αντικαθιστούμε στην γενική λύση και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{at}\, 2\mathrm{Re}[r_1 e^{ibt}] = e^{at}\,[c_1 \cos bt - c_2 \sin bt] \\ x_2(t) &= e^{at}\, 2\mathrm{Im}[r_1 e^{ibt}] = e^{at}\,[c_1 \sin bt + c_2 \cos bt]. \end{aligned}$$

Η λύση αυτή γράφεται και στην μορφή

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0), \tag{2.2.24}$$

όπου $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ και $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(t = 0)$ είναι οι αρχικές συνθήκες. □

Στην Εξ. (2.2.24) ο πίνακας στο δεξιό μέλος δίνει στροφή το $\boldsymbol{x}_0$ κατά γωνία $bt$ ενώ το εκθετικό γίνει είτε αύξηση (αν $a > 0$) είτε συρρίκνωση (αν $a < 0$) του μέτρου του $\boldsymbol{x}_0$.

**Πολικές συνεταγμένες**: Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να γίνουν πιό εύκολα κατανοητά και μπορούμε να έχουμε μία πιό παραστατική μελέτη του συστήματος (2.2.23) και των λύσεών του αν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες.

Ξεκινάμε ορίζοντας την μιγαδική μεταβλητή $z = x_1 + ix_2$. Ένας σύντομος υπολογισμός δείχνει ότι το σύστημα (2.2.23), γράφεται στη συμπαγή μορφή

$$\dot{z} = (a + ib)\, z.$$

Στη συνέχεια εισάγουμε τις πολικές συντεταγμένες $(r, \theta)$ και χρησιμοποιούμε την πολική μορφή γιά την μιγαδική μεταβλητή $z = r(t)e^{i\theta(t)}$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως

$$\begin{cases} \dot{r} &= ar \\ \dot{\theta} &= b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = r_0\, e^{at} \\ \theta = bt + \theta_0. \end{cases} \tag{2.2.25}$$

Αυτή η μορφή της λύσης δείχνει ότι η χρονική εξέλιξη κάθε σημείου στο διάγραμμα φάσης δίνει περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων, ενώ ταυτοχρόνως πλησιάζει (γιά $a < 0$) ή απομακρύνεται (γιά $a > 0$) από αυτό. Λέμε ότι η αρχή των αξόνων είναι ένα *σπειροειδές σημείο* ισορροπίας. Αυτό είναι ευσταθές για $a < 0$ και ασταθές για $a > 0$. □

**Παρατήρηση 2.2.5 (Σπείρα)** *Ένα σημείο ισορροπίας με δύο μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές λέγεται σπειροειδές σημείο ή σπείρα. Όταν το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι αρνητικό τότε η κίνηση είναι προς τα μέσα (έχουμε μία ευσταθή σπείρα). Στην αντίθετη περίπτωση (πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών θετικό) η κίνηση είναι προς τα έξω (έχουμε μία ασταθή σπείρα).*

**Παρατήρηση 2.2.6 (Κέντρο)** *Στην περίπτωση $a = 0$ έχουμε κλειστές τροχιές και λέμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι κέντρο.* □

Οποιοδήποτε σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned}$$

γιά τον οποίο έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές έχει ένα σπειδοειδές σημείο ισορροπίας. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 2** *Εάν ένας πραγματικός πίνακας* $A$ *διαστάσεων* $2n \times 2n$ *έχει διάκριτες ιδιοτιμές* $\lambda_j = a_j + ib_j$ *και* $\lambda_j^* = a_j - ib_j$ *και ιδιοδιανύσματα* $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{u}_j + i\boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{w}_j^* = \boldsymbol{u}_j - i\boldsymbol{v}_j$, *τότε* $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n\}$ *είναι βάση του* $\boldsymbol{R}^{2n}$, *ο πίνακας* $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_n]$ *είναι αντιστρέψιμος και*

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}.$$

*Ώστε εάν ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών* $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$, *έχουμε*

$$\dot{\boldsymbol{y}} = P^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}\boldsymbol{y}.$$

*Άρα ισχύει*

$$\boldsymbol{x}(t) = P\operatorname{diag}\begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}(0).$$

**Παράδειγμα 2.2.5.** (σπειροειδές σημείο) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 = -1 \pm i$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(x_1, x_2) = (1, -2 \pm i)$. Άρα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ τότε βρίσκουμε $\dot{\boldsymbol{y}} = P^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$. Από το παραπάνω θεώρημα (ή από κατ' ευθείαν υπολογισμό του $P^{-1}AP$) έχω

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}.$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα (με $a = -1, b = 1$) συνάγουμε

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\boldsymbol{y}(0)$$

Τελικά

$$\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t) = Pe^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\boldsymbol{y}(0) = Pe^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}(0) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}\left[x_1(0)\cos t + (2x_1(0) + x_2(0))\sin t\right] \\ x_2(t) &= e^{-t}\left[x_2(0)\cos t - (5x_1(0) + 2x_2(0))\sin t\right] \end{aligned}$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα φάσης στο επίπεδο $(x_1, x_2)$. Έχουμε ένα ευσταθές *σπειροειδές σημείο*.

**Παράδειγμα 2.2.6.** (σπειροειδές σημείο) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i,$$

όπου $\lambda_2 = \lambda_1^*$. Για $\lambda = \lambda_1$ και $\lambda = \lambda_2$ βρίσκουμε αντιστοίχως

$$s_1 = (-2 + i) r_1, \qquad s_2 = (-2 - i) r_2.$$

Άρα η γενική λύση γράφεται

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r_1\, e^{(-1+i)t} + r_2\, e^{(-1-i)t}, \\ x_2(t) &= r_1(-2+i)\, e^{(-1+i)t} + r_2(-2-i)\, e^{(-1-i)t}. \end{aligned}$$

Αν ζητάμε πραγματικές λύσεις τότε πρέπει να θέσουμε $r_2 = r_1^*$ και γράφοντας $r_1 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}ic_2$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}(c_1 \cos t - c_2 \sin t), \\ x_2(t) &= -e^{-t}[(2c_1 + c_2)\cos t + (c_1 - 2c_2)\sin t]. \end{aligned}$$

*Σχεδιασμός διαγράμματος φάσεων.* Σχεδιάζουμε μία σπείρα στην οποία τα βέλη οδηγούν προς το σημείο ισορροπίας, διότι το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι αρνητικό. Υπάρχουν δύο τέτοιες σπείρες (αριστερόστροφη και δεξιόστροφη). Επιλέγουμε εκείνη που ικανοποιεί τις εξισώσεις, πράγμα που το ελέγχουμε με υπολογισμό των $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ σε ορισμένα σημεία του διαγράμματος φάσεων.

### 2.2.5 Διάγραμμα σημείων ισορροπίας.

Έστω η γενική μορφή

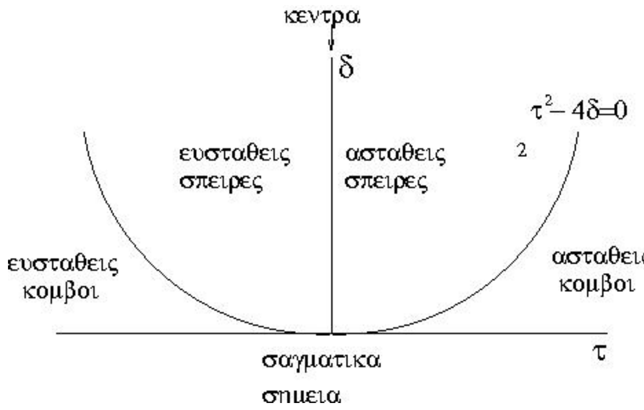
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2. \end{aligned}$$

Θέτουμε $\delta = \det A = ad - bc$ και $\tau = \mathrm{trace} A = a + d$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$$

(α) Γιά $\delta < 0$ έχουμε σαγματικό σημείο.
(β) Γιά $\delta > 0$ και $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ έχουμε κόμβο.
Είναι ευσταθής γιά $\tau < 0$ και ασταθής γιά $\tau > 0$.
(γ) Γιά $\delta > 0$ και $\tau^2 - 4\delta < 0$ έχουμε σπειροειδές σημείο (γιά $\tau \neq 0$).
Είναι ευσταθές γιά $\tau < 0$ και ασταθές γιά $\tau > 0$.
(δ) Γιά $\delta > 0$ και $\tau = 0$ έχουμε κέντρο.

*Βιβλιογραφία:* [9, 8]




Σχήμα 2.2: Διάγραμμα σημείων ισορροπίας στο χώρο των παραμέτρων.

## 2.3 Ευστάθεια σημείων ισορροπίας

**Θεώρημα 3** *Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ ενός γραμμικού συστήματος $n$ εξισώσεων έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος τότε: για κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ ισχύει $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$ και επίσης, αν $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$, $\lim_{t\to-\infty} |\boldsymbol{x}(t)| = \infty$.*

**Θεώρημα 4** *Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ έχουν θετικό πραγματικό μέρος τότε: για κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ ισχύει $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$ και επίσης, αν $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$, $\lim_{t\to\infty} |\boldsymbol{x}(t)| = \infty$.*

**Ορισμός 1.** Έστω $\lambda_j = a_j + ib_j$ οι ιδιοτιμές του πίνακα ενός γραμμικού συστήματος και $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{u}_j + i\boldsymbol{v}_j$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε ονομάζουμε τους χώρους

$$\begin{aligned} E^s &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \,|\, a_j < 0\} \\ E^u &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \,|\, a_j > 0\} \\ E^c &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \,|\, a_j = 0\} \end{aligned}$$

ευσταθή, ασταθή και κεντρικό υπόχωρο του συστήματος αντίστοιχα.

**Παρατήρηση 2.3.1** *Για ένα σύστημα δύο εξισώσεων με ένα σαγματικό σημείο ο ευσταθής και ο ασταθής υπόχωρος είναι ο καθένας μία ευθεία.*

**Παράδειγμα 2.3.1.** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ και ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{w}_{1,2} = [0,1,0]^T \pm i[1,0,0]^T$ και επίσης $\lambda_3 = 3$ με ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{u}_3 = [0,0,1]^T$. Ο ευσταθής υπόχωρος $E^s$ είναι το επίπεδο $(x_1, x_2)$ και ο ασταθής υπόχωρος $E^u$ είναι ο άξονας $x_3$.

**Θεώρημα 5** *Οι υπόχωροι $E^s, E^u, E^c$ ενός πίνακα $n \times n$ μένουν αναλλοίωτοι από τις αντίστοιχες εξισώσεις. Επίσης,*

$$\boldsymbol{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c.$$

**Ορισμός 2.** Ένα σημείο ισορροπίας $\boldsymbol{x}_0$ λέγεται *ευσταθές* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}(t=0) \in N_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ έχουμε $\boldsymbol{x}(t) \in N_\epsilon(\boldsymbol{x}_0)$ γιά κάθε χρόνο $t > 0$.

Το σημείο ισορροπίας λέγεται *ασταθές* εάν δεν είναι ευσταθές.

**Παρατήρηση 2.3.2** *Ένα σαγματικό σημείο είναι ασταθές.*
*Ένας κόμβος μπορεί να είναι ασταθής (γιά θετικές ιδιοτιμές) ή ευσταθής (γιά αρνητικές ιδιοτιμές).*
*Ένα σπειροειδές σημείο μπορεί να είναι ασταθές (ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος) ή ευσταθές (ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος).*
*Ένα κέντρο είναι ευσταθές.*

**Παρατήρηση 2.3.3** *Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = 0.$$

**Παρατήρηση 2.3.4** *Εάν ένα σπειροειδές σημείο είναι ευσταθές τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*
*Ένα κέντρο είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

**Άσκηση 2.3.1.** Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2\,, \qquad \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2.$$

Κληρώστε 4 αριθμούς από το -10 έως το 10 και θεωρήστε ότι οι αριθμοί που κληρώθηκαν δίνουν τις τιμές των $a, b, c, d$. Βρείτε το είδος και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας γιά το γραμμικό σύστημα που κληρώσατε. Σχεδιάστε, με μολύβι, με όσο καλύτερη ακρίβεια μπορείτε το διάγραμμα φάσεων (δείξτε με σαφήνεια τον ασταθή και ευσταθή υπόχωρο).

*Βιβλιογραφία:* [8, 9]

## 2.4 Μη γραμμικά συστήματα

'Εστω το μη γραμμικό σύστημα $n$ εξισώσεων

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{2.4.1}$$

όπου $\boldsymbol{x}$ είναι το διάνυσμα των $n$ μεταβλητών και $\boldsymbol{f}$ είναι διάνυσμα $n$ συναρτήσεων. Γιά παράδειγμα, γιά ένα σύστημα δύο εξισώσεων έχουμε την μορφή

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Θεωρούμε ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος $\boldsymbol{x}_0$ και τον ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο στο σημείο ισορροπίας (υποθέτουμε σύστημα δύο εξισώσεων)

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} df_1/dx_1 & df_1/dx_2 \\ df_2/dx_1 & df_2/dx_2 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0}.$$

Θα δούμε ότι το γραμμικό σύστημα

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \tag{2.4.2}$$

διατηρεί (στην γενική περίπτωση), κοντά στο σημείο ισορροπίας $\boldsymbol{x}_0$ την μορφή του διαγράμματος φάσης του μη γραμμικού συστήματος (εκτός ειδικών περιπτώσεων).

**Θεώρημα 6** *(The stable manifold theorem). Έστω $E$ ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\boldsymbol{R}^n$ που περιέχει την αρχή των αξόνων, επίσης $\boldsymbol{f} \in C^1(E)$, όπου $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ και ότι $D\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$ έχει $k$ ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και $n-k$ ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος. Τότε υπάρχει μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα $S$ διαστάσεως $k$ η οποία είναι εφαπτόμενη στον ευσταθή υπόχωρο $E^s$ του γραμμικοποιημένου συστήματος (2.4.2) στο σημείο $\mathbf{0}$ τέτοια ώστε γιά κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}_0 \in S$*

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}.$$

*Επίσης, υπάρχει μία πολλαπλότητα $U$ διαστάσεως $n-k$ εφαπτόμενη στον ασταθή υπόχωρο $E^u$ του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο $\mathbf{0}$ τέτοια ώστε γιά κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}_0 \in U$*

$$\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}.$$

*Οι πολλαπλότητες $S$ και $U$ είναι αναλλοίωτες στις εξισώσεις.*

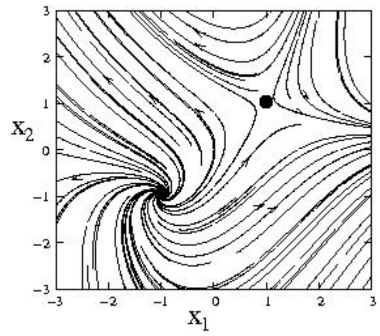
Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να πούμε ότι, αν ένα σημείο ισορροπίας έχει όλες τις ιδιοτιμές με μη-μηδενικό πραγματικό μέρος (οπότε λέγεται *υπερβολικό σημείο ισορροπίας*), τότε η συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την συμπεριφορά του γραμμικοποιημένου συστήματος.

**Παράδειγμα 2.4.1.** Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων του μη γραμμικού συστήματος

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \qquad \dot{x}_2 = 1 - x_1 x_2.$$

Θέτουμε $f_1 = x_1 - x_2,\ f_2 = 1 - x_1 x_2$. Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται ως

$$f_1 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$




Σχήμα 2.3: Διάγραμμα φάσεων γιά το μη γραμμικό πρόβλημα του παραπάνω παραδείγματος. Έχουμε ένα ασταθές σπειροειδές σημείο και ένα σαγματικό σημείο (σημειώνονται μαύρους κύκλους στο σχήμα). Έχει σημειωθεί με βέλη η φορά ορισμένων καμπυλών.

$$f_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1 = x_2.$$

Άρα έχουμε τα σημεία $(-1,-1)$ και $(1,1)$.

Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} df_1/dx_1 & df_1/dx_2 \\ df_2/dx_1 & df_2/dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}.$$

Για το σημείο $(-1,-1)$ ορίζω $\xi_1 = x_1 + 1$, $\xi_2 = x_2 + 1$ και έχουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, άρα το σημείο είναι ένα ασταθές σπειροειδές σημείο. Η φορά περιστροφής της σπείρας μπορεί να βρεθεί ως εξής. Στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις θεωρούμε, π.χ., $\xi_2 = 0, \xi_1 > 0$ (δηλ., είμαστε στον θετικό άξονα $x_1$) και βρίσκουμε $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 > 0$, άρα η κίνηση επάνω στην σπείρα είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογίου.

Για το σημείο $(1,1)$ ορίζουμε $\xi_1 = x_1 - 1$, $\xi_2 = x_2 - 1$ και έχουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, άρα το σημείο είναι ένα σαγματικό σημείο. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(1, 1 \mp \sqrt{2})$ και ορίζουν αντίστοιχα τον ασταθή και ευσταθή υπόχωρο.

**Άσκηση 2.4.1.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και σχεδιάστε (με υπολογιστή) το διάγραμμα φάσεων για τον αναρμονικό ταλαντωτή

$$\ddot{x} = -x + \epsilon x^3, \qquad \epsilon > 0.$$

(Γιά τη σχεδίαση του διαγράμματος φάσεων χρησιμοποιήστε ένα συγκεκριμένο $\epsilon$ της επιλογής σας.)
**Λύση.** Γράφουμε το σύστημα ως εξής

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \epsilon x^3. \end{aligned}$$

Γιά τα σημεία ισορροπίας, έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \Rightarrow y = 0 \\ \dot{y} &= 0 \Rightarrow x(1-\epsilon x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.\end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε τα τρία σημεία ισορροπίας

$$(0,0), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right), \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right).$$

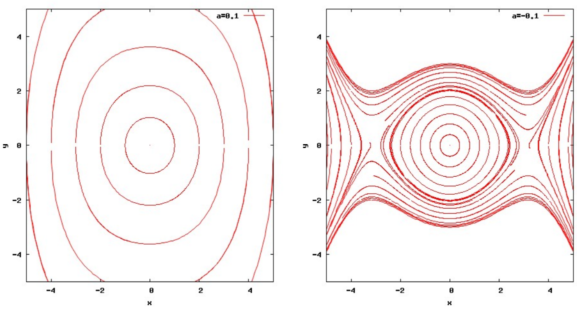
Γιά τις καμπύλες του διαγράμματος φάσεων γράφουμε την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+\epsilon x^3}{y} \Rightarrow \int y dy = \int (-x+\epsilon x^3) dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \epsilon\frac{x^4}{4} = C',$$

ή καλύτερα

$$x^2 + y^2 - \epsilon\frac{x^4}{2} = C. \tag{2.4.3}$$

Παρατηρούμε ότι γιά $x = 0$ το $C$ παίρνει όλες τις θετικές τιμές. και ότι γιά $y = 0$ το $C$ παίρνει όλες τις αρνητικές τιμές. Άρα όλες οι πραγματικές τιμές του $C$ δίνουν φασικές καμπύλες.



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα φάσεων για έναν αναρμονικό ταλαντωτή με (α)$\epsilon = -0.1$ και (β) $\epsilon = 0.1$. Η φορά των καμπυλών είναι όπως στο απλό εκκρεμές.

(i) Γύρω από το σημείο $(0,0)$ η συνάρτηση στο αριστερό μέλος της (2.4.3) είναι προσεγγιστικά παραβολοειδές για κάθε $\epsilon < 0$. Άρα η καμπύλη που ορίζεται από την (2.4.3) είναι κλειστή (κύκλος κοντά στην αρχή των αξόνων). Ώστε το σημείο ισορροπίας είναι κέντρο. Έχουμε μόνο ένα σημείο ισορροπίας άρα το διάγραμμα φάσεων αποτελείται από κλειστές καμπύλες γύρω από αυτό.

(ii) Στην περίπτωση $\epsilon = 0$ οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων είναι ομόκεντροι κύκλοι.

(iii) Γιά την περίπτωση $\epsilon > 0$: Γύρω από το σημείο $(0,0)$ η συνάρτηση στο αριστερό μέλος της (2.4.3) είναι προσεγγιστικά παραβολοειδές. Άρα η καμπύλη που ορίζεται από την (2.4.3) είναι κλειστή (κύκλος κοντά στην αρχή των αξόνων).

Γύρω από τα σημεία ισορροπίας $(\pm\sqrt{-1/\epsilon}, 0)$ γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις. Ορίζουμε $x' = x - x_0$ (όπου $(x_0, 0)$ είναι το σημείο ισορροπίας) και αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κίνησης, όπου κρατάμε μόνο γραμμικούς όρους. Η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$\dot{y} = -(x'+x_0) + \epsilon(x'+x_0)^3 \approx -x' + x_0 + \epsilon(x_0^3 + 3x_0^2 x') = (-1+3\epsilon x_0^2)x' = 2x'.$$

Άρα έχουμε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= y \\ \dot{y} &= 2x'.\end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, άρα τα δύο σημεία είναι σαγματικά σημεία. Γιά $\lambda = \sqrt{2}$ έχουμε το ιδιοδιάνυσμα $(1, \sqrt{2})$ και γιά $\lambda = -\sqrt{2}$ έχουμε το ιδιοδιάνυσμα $(1, -\sqrt{2})$.

Σχεδιάζουμε (με βάση τα παραπάνω) την μορφή του διαγράμματος φάσεων κοντά στα σημεία ισορροπίας και συνδέουμε ομαλά τις καμπύλες.

*Σημείωση:* Γιά να σχεδιάσουμε τις φασικές καμπύλες με το gnuplot χρησιμοποιούμε τις εντολές:

```
eps = 0.01
set xrange[-20:20]
set yrange[-20:20]
set view 0,0
set size 0.7,1
unset surface
set contour
set isosamples 100,100
set cntrparam levels incremental -100,10,100
splot x**2+y**2 - eps*x**4/2
```

*Βιβλιογραφία:* [9, 8]

# Κεφάλαιο 3

# Πληθυσμιακά μοντέλα

## 3.1 Απλά πληθυσμιακά μοντέλα

Υποθέτουμε ένα βιολογικό είδος. Θα θέλαμε να μελετήσουμε την ανάπτυξη του πληθυσμού του $N = N(t)$. Ας θεωρήσουμε ως κυριότερες αιτίες μεταβολής του πληθυσμού τις γεννήσεις και τους φυσιολογικούς θανάτους. Στην απλούστερη περίπτωση θεωρούμε ότι οι γεννήσεις αλλά και οι θάνατοι είναι ανάλογοι του μεγέθους του πληθυσμού. Δηλαδή, οι κατά κεφαλήν ρυθμοί γεννήσεων ($b$) και θανάτων ($d$) είναι σταθεροί. Ώστε γράφουμε ένα μοντέλο

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN, \quad b, d > 0.$$

το οποίο δίνει αύξηση (λόγω γεννήσεων) και μείωση (λόγω θανάτων) ανάλογες του πληθυσμού και αγνοεί άλλα φαινόμενα, π.χ., μετανάστευση κλπ. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$N(t) = N_0\, e^{(b-d)t}, \quad N_0 = N(t=0).$$

Αν $b > d$ ο πληθυσμός αυξάνει. Θεωρούμε ως πιό φυσιολογικό γιά ένα είδος την αύξηση του πληθυσμού του οπότε θα γράφουμε συνήθως

$$\frac{dN}{dt} = rN, \tag{3.1.1}$$

όπου $r$ μία θετική σταθερά.

Παρατηρούμε όμως αμέσως ότι το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να ισχύει για μεγάλο $N$ διότι τότε ο πληθυσμός αυξάνει απεριόριστα . Διορθώνουμε το μοντέλο ως εξής

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{3.1.2}$$

και αυτό το ονομάζουμε *λογιστικό μοντέλο*. Γιά $N \ll K$ το μοντέλο αυτό δίνει παρόμοια αποτελέσματα με το προηγούμενο, άρα $r$ είναι και πάλι ο ρυθμός ανάπτυξης του πληθυσμού όταν το $N$ είναι μικρό. Όσο το $N$ γίνεται μεγαλύτερο βλέπουμε ότι ο ρυθμός αύξησης μειώνεται λόγω της παρουσίας του παράγοντα $(1 - N/K)$ και γιά $N \sim K$ ο νέος νόμος είναι σημαντικά διαφορετικός από τον προηγούμενο. Γιά $N > K$ ο ρυθμός αύξησης γίνεται αρνητικός, έχουμε δηλαδή μείωση του πληθυσμού. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το $K$ είναι το μέγεθος του πληθυσμού πάνω από το οποίο σταματάει η αύξηση του είδους διότι ενδεχομένως αυτός επιβαρύνει υπέρμετρα το περιβάλλον ή γιά άλλους λόγους. Η λύση της εξίσωσης (3.1.2) είναι

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}. \tag{3.1.3}$$

Παρατηρούμε ότι, γιά $r > 0$, ισχύει $N(t) \to K$ όταν $t \to \infty$

Η εξίσωση (3.1.2) είναι μία μη-γραμμική εξίσωση, διότι ο δύτερος όρος στο δεξιό μέλος της (αν το αναπτύξουμε) είναι τετραγωνικός στη μεταβλητή $N$. Αυτή είναι μία σημαντικά διαφορά σε σύγκριση με το γραμμικό μοντέλο (3.1.1).

Μία σημαντική πληροφορία που θα θέλαμε να εξάγουμε από τα πληθυσμιακά μοντέλα αφορά τον πληθυσμό ισορροπίας του συστήματος. Ρωτάμε δηλαδή ποιός είναι εκείνος ο πληθυσμός ο οποίος όταν τον φθάσει το σύστημα τότε αυτός παραμένει σταθερός στον χρόνο. Η συνθήκη γιά αυτό είναι $dN/dt = 0$ άρα

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0 \Rightarrow N = 0 \quad ή \quad N = K.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των ατόμων θα ισορροπήσει είτε όταν εξαφανισθούν όλα τα άτομα ($N = 0$) είτε όταν φθάσουν τον αριθμό ($N = K$). Γιά την πιό ενδιαφέρουσα περίπτωση $r > 0$ θα ισχύσει η δεύτερη εκδοχή, όπως έχουμε ήδη δει από τη λύση (3.1.3).

Τα μοντέλα που περιγράφηκαν εδώ είναι σχετικά απλά και μας παρέχουν μία πρώτη επαφή με το αντικείμενο. Είναι πάντως συνήθως ανεπαρκή για να περιγράψουν πραγματικά συστήματα, μπορούν όμως να βελτιωθούν και να γίνουν πιό ρεαλιστικά.

**Άσκηση 3.1.1.** Κανονικοποιήστε κατάλληλα την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή ($t$ και $N$) και γράψτε την Εξ. (3.1.2) σε κανονική μορφή. Επίσης γράψτε την λύση της κανονικής μορφής και συνδέστε την με την λύση που δώθηκε παραπάνω.

**Άσκηση 3.1.2.** Κάνετε τη γραφική παράσταση της λύσης της λογιστικής εξίσωσης (3.1.2). Δοκιμάστε διάφορες αρχικές συνθήκες.

**Άσκηση 3.1.3.** Έστω ότι σε ένα πανεπιστήμιο δραστηριοποιείται η φοιτητική παράταξη Α. Ένα ποσοστό (έστω $r$) των οπαδών της δραστηριοποιείται έντονα και πείθουν ο καθένας ένα νέο φοιτητή κάθε χρόνο να ενταχθεί στην παράταξη. Επίσης λαμβάνουμε υπόψιν ότι ένα ποσοστό (έστω $s$) των οπαδών αποφοιτά κάθε χρόνο.

(α) Γράψτε ένα μοντέλο γιά τον αριθμό των οπαδών της παράταξης σαν συνάρτηση του χρόνου.

Ακολούθως, θεωρούμε ότι από τον συνολικό αριθμό των φοιτητών του πανεπιστημίου Φ μόνο ένα ποσοστό (έστω $p$) είναι δυνατόν να πεισθεί από την παράταξη Α ενώ οι υπόλοιποι είναι εξαιρετικά δύσκολο να γίνουν οπαδοί της (γιά ιδεολογικούς και άλλους λόγους).

(β) Γράψτε ένα νέο μοντέλο γιά τον αριθμό των οπαδών της παράταξης εισάγοντας τη λογιστική ανάπτυξη (logistic growth) ώστε να λάβετε υπόψιν την παραπάνω παρατήρηση (θεωρήστε $r > s$).

(γ) Ορίστε αδιάστατες (κανονικές) μεταβλητές και γράψτε την κανονική μορφή της εξίσωσης (του (β) ) στις νέες μεταβλητές.
**Λύση.** (α) Έστω $N$ ο αριθμός των φοιτητών της παράταξης Α. Έχουμε

$$\frac{dN}{dt} = (r - s)N.$$

(β) Θέτουμε $\alpha := r - s$ και έχουμε $r > s \Rightarrow \alpha > 0$. Σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο (α) θα έδινε $N(t) \to \infty$ γιά $t \to \infty$. Αν εισάγουμε την λογιστική ανάπτυξη έχουμε το μοντέλο

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

όπου $K := p\Phi$. Βλέπουμε ότι $N(t) \to K$ γιά $t \to \infty$.

(γ) Ορίζουμε κανονικές μεταβλητές

$$n := \frac{N}{K}, \qquad \tau := \alpha t$$

αντικαθιστούμε στην εξίσωση του (β) και έχουμε

$$\frac{dn}{d\tau} = n(1-n)$$

την κανονική μορφή της εξίσωσης.

## 3.2 Μοντέλα πληθυσμών δύο ειδών

### 3.2.1 Μοντέλο Lotka-Volterra

Σε μία λίμνη ζουν δύο είδη ψαριών: το A, το οποίο ζει τρώγωντας χόρτα (τα οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν σε αφθονία) και το B (κυνηγός) το οποίο τρέφεται τρώγοντας το A (θήραμα). Χρειαζόμαστε ένα μοντέλο για την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο ειδών.

Έστω $x(t)$ ο πληθυσμός του είδους A και $y(t)$ ο πληθυσμός του B. Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός του A αυξάνει ακολουθώντας έναν απλό νόμο όταν αυτό αφήνεται ελεύθερο από εξωτερικές επιδράσεις. Σε χρόνο $\delta t$ έχουμε αύξηση $\delta x$ κατά

$$ax\,\delta t, \quad a > 0$$

όπου έχει ληφθεί υπ΄ όψιν ένας σταθερός ρυθμός κατά κεφαλήν γεννήσεων και θανάτων όπως ακριβώς στο μοντέλο (3.1.1).

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ρυθμός μείωσης του A είναι ανάλογος των συναντήσεων μεταξύ A και B:

$$-cxy\,\delta t, \quad c > 0$$

διότι τα A τρώγονται από τα B.

Άρα έχουμε συνολική μεταβολή

$$\delta x = ax\,\delta t - cxy\,\delta t,$$

το οποίο σε διαφορική μορφή γράφεται

$$\dot{x} = ax - cxy. \tag{3.2.1}$$

Τώρα υποθέτουμε ότι (απουσία του είδους A, δηλ., της τροφής) για το B έχουμε θανάτους και όχι γεννήσεις, άρα μία μεταβολή, εξ αυτού του λόγου, $\delta y$ της μορφής

$$-by\,\delta t, \quad b > 0.$$

Από την άλλη μεριά, οι γεννήσεις του B αναμένουμε ότι εξαρτόνται άμεσα από την ύπορξη τροφής. Υποθέτουμε λοιπόν αύξηση του πλυθυσμού του B, λόγω εύρεσης τροφής, ανάλογη με τις συναντήσεις μεταξύ A και B:

$$dxy\,\delta t, \quad d > 0.$$

Τελικά έχουμε, σε διαφορική μορφή, τον ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού $y$

$$\dot{y} = -by + dxy. \tag{3.2.2}$$

Έχουμε να μελετήσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων πρώτης τάξης (3.2.1), (3.2.2). Σημειώνουμε ότι υπάρχει ο περιορισμός $x \geq 0,\ y \geq 0$ (οι πληθυσμοί πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί).

*Σημεία ισορροπίας.* Το πρώτο βήμα γιά την μελέτη του συστήματος είναι να βρούμε τα *σημεία ισορροπίας* του, δηλαδή εκείνα τα σημεία για τα οποία έχουμε $\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0$:

$$ax - cxy = 0, \qquad -bx + dxy = 0.$$

Οι λύσεις των εξισώσεων δίνουν τα δύο σημεία

$$(0, 0) \qquad\qquad (b/d, a/c). \tag{3.2.3}$$

Το πρώτο σημείο μας λέει απλώς ότι εάν αρχικώς δεν έχουμε κανένα Α και κανένα Β τότε κανένα είδος δεν πρόκειται να δημιουργηθεί. Το δεύτερο σημείο ισορροπίας παριστάνει μια κατάσταση του συστήματος στην οποία οι πληθυσμοί των δύο ειδών παραμένουν αμετάβλητοι στον χρόνο. (Δείτε τα δύο σημεία ισορροπίας στο διάγραμμα φάσεων στο σχήμα 3.1.)

*Φασικές καμπύλες.* Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τις καμπύλες του διαγράμματος φάσεων. Αυτές ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-b+cx)y}{(a-cy)x},$$

η οποία μπορεί να λυθεί αν διαχωρίσουμε τα $x$ και $y$:

$$\int \frac{a-cy}{y}\,dy = \int \frac{-b+dx}{x}\,dx,$$

και παίρνουμε λύση

$$(cy - a\ln y) + (dx - b\ln x) = C. \tag{3.2.4}$$

Το $C$ είναι μιά αυθαίρετη σταθερά, η οποία παίζει τον ρόλο της παραμέτρου της οικογένειας καμπυλών του διαγράμματος φάσεων.

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (3.2.4) είναι της μορφής $f(x) + g(y)$, όπου $f(x) = dx - b\ln x$ και $g(y) = cy - a\ln y$. Η συνάρτηση $f(x) + g(y)$ έχει ελάχιστο στο σημείο όπου $d[f(x) + g(y)]/dx = 0 \Rightarrow df(x)/dx = 0$ και $d[f(x) + g(y)]/dy = 0 \Rightarrow dg(y)/dy = 0$. Βρίσκουμε

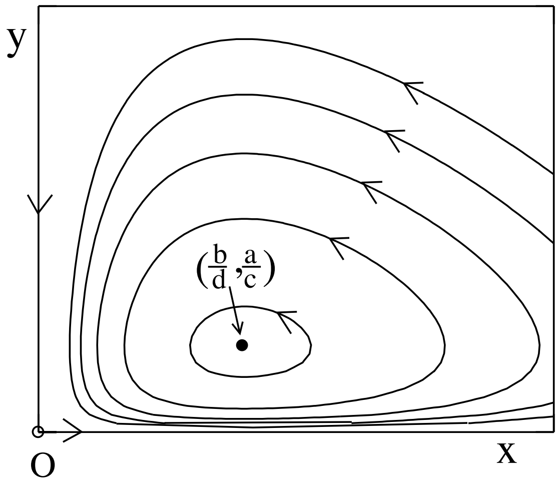
$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{b}{x} - d = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{d}, \qquad \frac{dg}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{a}{y} - c = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{c}. \tag{3.2.5}$$

Δηλαδή το δεξιό μέλος της (3.2.4) έχει ελάχιστο στο δεύτερο σημείο της Εξ. (3.2.3), δηλ. το $(b/d, a/c)$.

Γύρω από το σημείο ισορροπίας (3.2.5) οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων είναι κλειστές καμπύλες. Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσεων. Κάθε καμπύλη έχει μια κατεύθυνση η οποία δείχνει την αλλαγή της κατάστασης με την ροή του χρόνου. Την κατεύθυνση μπορούμε να την βρούμε, π.χ., υπολογίζοντας το πρόσημο του $\dot{x}$ σε ένα σημείο $x = b/d, y > a/c$. Αν βρούμε την κατεύθυνση σε ένα σημείο όλες οι άλλες κατευθύνσεις προκύπτουν από ιδιότητες συνέχειας.

Εφ΄ όσον οι καμπύλες είναι κλειστές οι πληθυσμοί $x(t)$, $y(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Η χρονική στιγμή που ο πληθυσμός Β είναι μέγιστος είναι περίπου ένα τέταρτο της περιόδου μετά από την στιγμή που ο πληθυσμός Α ήταν στο μέγιστο. Όταν το Β τρώει το Α ο πληθυσμός του αυξάνει ενώ αυτός του Α μειώνεται. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μειωθεί αργότερα το Β. Ακολούθως αυξάνεται το Α διότι δεν υπάρχουν πολλά άτομα από το Β για να το φάνε και ο κύκλος ξαναρχίζει. Τέτοιες συμπεριφορές έχουν παρατηρηθεί σε βιολογικά συστήματα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι, αναλόγως των αρχικών συνθηκών, κάθε σύστημα κινείται για πάντα πάνω σε μία από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος φάσεων. Μόνο εάν υποθέσουμε ότι υπάρξει κάποια ξαφνική αλλαγή στις συνθήκες του περιβάλοντος, π.χ., έλλειψη φυτικής τροφής κάποια χρονιά, τότε το σύστημα θα μεταβεί σε κάποια άλλη από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος φάσεων (αυτό βέβαια δεν περιγράφεται από το παρόν μοντέλο). Σε κάθε περίπτωση το σύστημα παραμένει εγκλωβισμένο σε μία από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μειονέκτημα του μοντέλου. Σε πολλά βιολογικά συστήματα θα περίμενε κανείς ότι το




Σχήμα 3.1: Το διάγραμμα φάσεων του μοντέλου Lotka-Volterra. Όλες οι καμπύλες είναι κλειστές, παρ΄ ότι ορισμένες βγαίνουν εκτός του πλαισίου. (Στο παράδειγμα του σχήματος έχουμε χρησιμοποιήσει $a = 1, b = 2, c = 1, d = 1$ οπότε τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(0,0), (2,1)$. Έχουμε σχεδιάσει τις καμπύλες της Εξ. (3.2.4) γιά $C = 1.7, 2.2, 2.7, 3.2, 3.7$.)

σύστημα θα είχε μια συγκεκριμένη κατάσταση ισσοροπίας (πιθανόν μία περιοδική κατάσταση) στην οποία θα επανερχόταν μετά από κάθε προσωρινή διαταραχή των εξωτερικών συνθηκών. Η συμπεριφορά του παρόντος μοντέλου πάντως είναι χρακτηριστική για όλα τα συστήματα τα οποία έχουν ένα πρώτο ολοκλήρωμα όπως το (3.2.4).

### 3.2.2 Μοντέλα ανταγωνισμού δύο ειδών

Μία σημαντική κατηγορία προβλημάτων είναι αυτά που αναφέρονται σε δύο είδη τα οποία ανταγωνίζονται γιά το ίδιο είδος τροφής ([10] Vol I σελ. 94). Γιά να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο μοντέλο θεωρούμε αρχικά χωριστά τη δυναμική γιά τον πληθυσμό καθενός από τα δύο είδη. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι η αύξηση του πληθυσμού γιά κάθε είδος ακολουθεί το λογιστικό μοντέλο, δηλαδή το περιβάλλον υποστηρίζει με τροφή την αύξηση του είδους μέχρι ένα σημείο κορισμού του πληθυσμού. Παριστάνουμε με $N_1, N_2$ τους δύο πληθυσμούς και έχουμε

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) \qquad (3.2.6)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right),$$

όπου έχουμε υποθέσει διαφορετικούς ρυθμούς αύξησης $r_1, r_2$ γιά κάθε είδος, καθώς επίσης και διαφορετικούς πληθυσμούς κορεσμού $K_1, K_2$.

Η αλληλεπίδραση του ενός είδους με το άλλο πρέπει να εισαχθεί έτσι ώστε η αύξηση του ενός πληθυσμού να περιορίζει την αύξηση του άλλου. Χρειαζόμαστε λοιπόν έναν επιπλέον όρο στην κάθε μία από τις εξισώσεις γιά τα $N_1, N_2$. Αν θεωρήσουμε έναν δεδομένο πληθυσμό $N_2$, τότε ένας όρος $-c_1 N_2 N_1$ στο δεξιό μέλος της πρώτης εξίσωσης παίζει τον ρόλο μείωσης του ρυθμού αύξησης γιά το $N_1$. Ο νέος ρυθμός αύξησης του $N_1$ θα γίνει $r_1 - c_1 N_2$. Αντιστοίχως, αν προσθέσουμε έναν όρο $-c_2 N_2 N_1$ στο δεξιό μέλος της πρώτης εξίσωσης θα έχουμε μείωση του ρυθμού αύξησης γιά το $N_2$. Ο νέος ρυθμός αύξησης του $N_2$ θα γίνει

$r_2 - c_2 N_1$. Γράφουμε το νέο μοντέλο στην μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12}\frac{N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21}\frac{N_1}{K_2}\right). \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Έχουμε επιλέξει ονόματα γιά τις νέες σταθερές $b_{12}, b_{21}$ τέτοια ώστε να τονίζεται ότι πρόκειται γιά σταθερές αλληλεπίδρασης των δύο ειδών. Επίσης, έχουμε πάρει τους λόγους των $N$ με τα $K$ γιά λόγους ομοιομορφίας των όρων (και απλοποίησης των διαστάσεων των παραμέτρων).

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία δεύτερη (εναλλακτική) ερμηνεία των όρων αλληλεπίδρασης του μοντέλου (3.2.7). Βλέπουμε ότι οι όροι αλληλεπίδρασης σε κάθε εξίσωση έχουν μία θέση ανάλογη του όρου στο λογιστικό μοντέλο ο οποίος εισάγει τους πληθυσμούς κορεσμού. Γιά να το καταλάβουμε αυτό ας θεωρήσουμε ότι οι δύο πληθυσμοί είναι περίπου ανάλογοι ο ένας του άλλου. Ο όρος αλληλεπίδρασης $b_{12}\, N_2/K_1$ προστίθεται στον όρο κορεσμού $N_1/K_1$ γιά τον πληθυσμό $N_1$, άρα ο πληθυσμός κορεσμού γιά τον $N_1$ μειώνεται όσο αυξάνει ο $N_2$ (δηλαδή, ο $N_1$ φθάνει σε κορεσμό σε μία τιμή τόσο μικρότερη της $K_1$ όσο μεγαλύτερος είναι ο $N_2$). Αντιστοίχως, ο όρος αλληλεπίδρασης $b_{21}\, N_1/K_2$ προστίθεται στον όρο κορεσμού $N_2/K_2$ γιά τον πληθυσμό $N_2$, άρα ο πληθυσμός κορεσμού γιά τον $N_2$ μειώνεται όσο αυξάνει ο $N_1$ (δηλαδή, ο $N_2$ φθάνει σε κορεσμό σε μία τιμή τόσο μικρότερη της $K_2$ όσο μεγαλύτερος είναι ο $N_1$).

Μοντέλα όπως το (3.2.7) είναι αρκετά περίπλοκα ώστε δεν μπορούμε να κάνουμε αναλυτικά βήματα γιά τη λύση τους (όπως κάναμε, γιά παράδειγμα, στο μοντέλο Lotka-Volterra), διότι περιλαμβάνουν τους όρους λογιστικής ανάπτυξης. Θεωρούνται όμως ότι δίνουν αποτελέσματα πιο κοντά στην πραγματικότητα.

### 3.2.3 Ασκήσεις

**Άσκηση 3.2.1.** Θεωρήστε το μοντέλο ανταγωνισμού δύο ειδών γιά το ίδιο είδος τροφής

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12}\frac{N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21}\frac{N_1}{K_2}\right). \end{aligned}$$

(α) Ορίστε κανονικές μεταβλητές γιά τους πληθυσμούς $N_1, N_2$ και γιά τον χρόνο $t$ και γράψτε την εξίσωση στις νέες μεταβλητές.
(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (μελετήστε όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων, αλλά υποθέστε $a \neq 1$, $b \neq 1$). (γ) Μελετήστε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας.
**Λύση.** (α) Ορίζουμε τις αδιάστατες μεταβλητές

$$u_1 = \frac{N_1}{K_1}, \qquad u_2 = \frac{N_2}{K_2}, \qquad \tau = r_1 t,$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις του μοντέλου και παίρνουμε τις

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= u_1(1 - u_1 - a\, u_2) \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \rho u_2(1 - u_2 - b\, u_1), \end{aligned}$$

όπου, γιά την απλοποίηση των εκφράσεων, έχουμε ορίσει τις νέες σταθερές

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}, \qquad a = b_{12}\frac{K_2}{K_1}, \qquad b = b_{21}\frac{K_1}{K_2}.$$

(β) Λύνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} u_1\,(1 - u_1 - a\,u_2) = 0 \\ u_2\,(1 - u_2 - b\,u_1) = 0 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τα ακόλουθα τέσσερα σημεία ισορροπίας $(x, y) = (x^*, y^*)$, όπου

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 0, \tag{3.2.8}$$

$$u_1^* = 1, \quad u_2^* = 0, \tag{3.2.9}$$

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 1, \tag{3.2.10}$$

$$u_1^* = \frac{1-a}{1-ab}, \quad u_2^* = \frac{1-b}{1-ab}. \tag{3.2.11}$$

Το τελευταίο σημείο είναι αποδεκτό (δηλαδή $u_1^* > 0$, $u_2^* > 0$) όταν (i) $a < 1$, $b < 1$, (ii) $a > 1$, $b > 1$, ενώ δεν είναι αποδεκτό όταν (iii) $a < 1$, $b > 1$, (iv) $a > 1$, $b < 1$.

(γ) Γιά να μελετήσουμε είδος και ευστάθεια σημείων ισορροπίας γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις γύρω από κάθε σημείο $(u_1^*, u_2^*)$. Θέτουμε $f_1(u_1, u_2) := u_1(1-u_1-au_2)$, $f_2(u_1, u_2) := \rho u_2\,(1 - u_2 - bu_1)$. Ο πίνακας των γραμμικοποιημένων εξισώσεων είναι

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{u_1^*, u_2^*} = \begin{bmatrix} 1 - 2u_1 - au_2 & -au_1 \\ -\rho\, bu_2 & \rho\,(1 - 2u_2 - bu_1) \end{bmatrix}_{u_1^*, u_2^*}. \tag{3.2.12}$$

*Σημείο ισορροπίας (3.2.8).* Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = 1, \rho > 0$. Άρα το σημείο είναι *ασταθής κόμβος*.

*Σημείο ισορροπίας (3.2.9).* Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & \rho(1-b) \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -1, \rho(1-b)$. Άρα το σημείο είναι (i) *ευσταθής κόμβος* αν $b > 1$ και (ii) *σαγματικό σημείο* αν $b < 1$.

*Σημείο ισορροπίας (3.2.10).* Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ -\rho b & -\rho \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = 1 - a, -\rho$. Άρα το σημείο είναι (i) *ευσταθής κόμβος* αν $a > 1$ και (ii) *σαγματικό σημείο* αν $a < 1$.

*Σημείο ισορροπίας (3.2.11).* Έχουμε

$$A = \frac{1}{1-ab}\begin{bmatrix} a-1 & a(a-1) \\ \rho b(b-1) & \rho(b-1) \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a-1)+\rho(b-1) \pm \sqrt{[(a-1)+\rho(b-1)]^2 - 4(1-ab)\rho(a-1)(b-1)}}{2(1-ab)}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις (i) $a < 1$, $b < 1$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ (εξηγήστε γιατί), άρα έχουμε έναν *ευσταθή κόμβο*. (ii) $a > 1$, $b > 1$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ (εξηγήστε γιατί), άρα έχουμε ένα *σαγματικό σημείο*.

**Άσκηση 3.2.2.** ([9] σελ 81 ασκ 2.13) Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς ξενιστή $H$ και παρασίτου $P$:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= (a_1 - b_1 H - c_1 P)H \\ \frac{dP}{dt} &= (a_2 - b_2 P + c_2 H)P, \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

όπου όλες οι σταθερές $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ είναι θετικές. Σε αντίθεση με το μοντέλο (3.2.7) έχουμε θεωρήσει ότι ο πληθυσμός των παρασίτων $P$ ευνοείται από την παρουσία ξενιστών.
(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.
(β) Δείτε ότι ένας πληθυσμός παρασίτων επιβιώνει ακόμα και αν ο πληθυσμός ξενιστών εξαφανιστεί.

# Βιβλιογραφία


[1] G.R. Fowles, “*Analytical mechanics*” (CBS College Publishing, 1986).

[2] H. Goldstein, “*Classical Mechanics*” (Addison Wesley, 1980).

[3] I. Δ. Χατζηδημητρίου, “*Θεωρητική μηχανική*”, 3η έκδοση (Γιαχούδη-Γιαννούλη, Θεσσαλονίκη, 2000).

[4] J.D. Logan, “*Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*” (ΠΕΚ, 1997).

[5] J.D. Logan, “*Applied Mathematics*” (John Wiley, 1987).

[6] B. Barnes and G. R. Fulford, “*Mathematical Modelling with Case Studies*” (CRC Press, 2009).

[7] N. D. Fowkes and J. J. Mahoney, “*An introduction to mathematical modeling*” (John Wiley, 1994).

[8] Lawrence Perko, “*Differential Equations and Dynamical Systems*”, Third edition (Springer, New York, 2001).

[9] D.W. Jordan and P. Smith, “*Nonlinear ordinary differential equations*” (Oxford University Press, 1987).

[10] J.D. Murray, *”Mathematical Biology”, Vol I* (Springer, Berlin Heidelberg, 2002).

[11] D. Griffiths, “*Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική*” (ΠΕΚ, 1996).

[12] P.G. Saffman, “*Vortex Dynamics*”, (Cambridge University Press, 1992).

[13] H. Aref, “*Point vortex dynamics: A classical mathematics playground*”, J. Math. Phys. **48**, 065401 (2007).

[14] P. K. Newton, “*The N-Vortex Problem*”, (Springer, 2001).