**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΜΕΜ 286: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ**

**Εισαγωγή στις Μεθόδους Monte Carlo: Ασκήσεις**

**Παράδοση: Εώς 24:00, 01/12/2014**

**ΑΣΚΗΣΗ 1: Γεννήτριες Τυχαίων Αριθμών (30 Μονάδες)**

Στόχος της άσκησης αυτής είναι η εξέταση της αποδοτικότητας γεννητριών τυχαίων αριθμών. Για τα παρακάτω προγράμματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού προτιμάτε (π.χ. MATLAB, C++, Fortran90).

Α) Θεωρήστε τον παρακάτω αλγόριθμο δημιουργίας ακολουθίας τυχαίων αριθμών (congruential generator), ***Χ***=[*Χ*i] (*i*=1,2,…,*n*):

****

όπου *α*, *b*, *M* είναι σταθερές (φυσικοί αριθμοί). Υπολογίστε:

1. Αν, για δεδομένο *n*, η ακολουθία ***Χ*** υπακούει την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Υπολογίστε την πιθανότητα κάνοντας το ιστόγραμμα της ***Χ***.
2. Μελετήστε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ διαδοχικών τυχαίων αριθμών κάνοντας το διάγραμμα *X*2k-1, vs. *X*2k.

Θεωρήστε διαφορετικές τιμές για τις σταθερές (π.χ. α=453, b=10, M=213) και διαφορετικές τιμές του *n*.

B) Όπως έχουμε αναφέρει υπάρχουν καλύτεροι αλγόριθμοι δημιουργίας τυχαίων αριθμών. Θεωρείστε την προεπιλεγμένη γεννήτρια τυχαίων αριθμών της γλώσσας που χρησιμοποιείται (π.χ. MATLAB: συνάρτηση *rand*, Mersenne Twister algorithm, <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html> ). Επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για την προεπιλεγμένη γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

Γράψτε μια αναφορά που περιέχει τα εξής:

1. Συνοπτική περιγραφή των αλγορίθμων που χρησιμοποιείται.
2. Παράθεση και περιγραφή των αποτελεσμάτων. Συγκρίνετε τις αποδόσεις των διαφορετικών μεθόδων και αιτιολογήστε τις διαφορές.

**ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογισμός του Αριθμού π (20 Μονάδες)**

Θεωρήστε τον αλγόριθμο υπολογισμού του αριθμού *π* που συζητήσαμε στην τάξη και ο οποίος βασίζεται στον υπολογισμό του εμβαδόν ενός κύκλου και του τετραγώνου με το οποίο τον περικλείουμε (*raindrop* experiment).



Φτιάξτε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του *π* χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Έστω *n* ο αριθμός των τυχαίων σημείων μέσα στο τετράγωνο. Βρείτε και γράψτε σε μια αναφορά τα ακόλουθα:

Α) Περιγράψτε λεπτομερώς τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείτε.

Β) Υπολογίστε τον αριθμό *π* για *n* = 1000, 10000, 1000000; Για καλύτερη ακρίβεια τρέξτε το πρόγραμμα 10 φορές για κάθε *n* και υπολογίστε τη μέση τιμή του *π*. Φτιάξτε ένα διάγραμμα με όλες τις τιμές (εκτιμήσεις) του *π*.

Γ) Υπολογίστε το σφάλμα των μετρήσεων χρησιμοποιώντας την ακριβή τιμή του αριθμού *π* (*π* = 3,141592653589793). Κάντε το διάγραμμα του σφάλματος της μέτρησης ως προς τον αριθμό των τυχαίων σημείων *n*. Εκτιμήστε πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το *n* για ακρίβεια υπολογισμού του *π* ίση με: 3, 5, 7 σημαντικών ψηφίων.

**ΑΣΚΗΣΗ 3: Σημαντική Δειγματοληψία (Importance Sampling) (50 Μονάδες)**

Στόχος της άσκησης αυτής είναι η εξέταση της σημαντικής δειγματοληψίας (importance sampling). Έστω ότι ζητάμε την αναμενόμενη τιμή (expectation value) της συνάρτησης *h*(*x*). όπου η *x* υπακούει μια κατανομή *g*(*x*) (κατανομή χ), δηλαδή το ολοκλήρωμα: **.**

Θα χρησιμοποιήσουμε σαν βοηθητική κατανομή *f*(*x*) μια κανονική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα:

****

Προσέξτε ότι οι *g’*(*x*), *f*(*x*) δεν είναι κανονικοποιημένες, δηλαδή γνωρίζουμε τις κατανομές μόνο ως προς μια σταθερά. Επίσης εφόσον η *g*(*x*) είναι μόνο για *x*≥1 πρέπει όταν δειγματοληπτούμε από την *f*(*x*) να διαγράφουμε κάθε *x*<1.

Α) Κάντε γραφική παράσταση των *h*(*x*), *f*(*x*), *g*(*x*).

B) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα στο διάστημα [1, 7] για *n* δείγμα τυχαίων μεταβλητών χρησιμοποιώντας αλγόριθμο Monte Carlo σημαντικής δειγματοληψίας. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως: ****όπου: .

Θεωρείστε *n* = 500. Τρέξτε τον αλγόριθμο για *m* φορές (*m*=10) και υπολογίστε το μέσο όρο. Υπολογίστε επίσης τη διακύμανση (variance) του δείγματος.

Γ) Επαναλάβετε το (Β) για διαφορετικές τιμές του *n*: *n*=1000, *n*=10000. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα με αυτά που βρήκατε στο (Β).

Δ) Επαναλάβετε τα (Β), (Γ) για μια κατανομή *f*(*x*) με μέση τιμή στο 5. Συζητήστε τις διαφορές των αποτελεσμάτων.

Γράψτε μια αναφορά που περιέχει τα εξής:

1. Συνοπτική περιγραφή των αλγορίθμων που χρησιμοποιείται.
2. Παράθεση και περιγραφή των αποτελεσμάτων. Συγκρίνετε τις αποδόσεις των διαφορετικών μεθόδων και αιτιολογήστε τις διαφορές.