



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Γενική Φυσική Ι

Ν. Κυλάφης

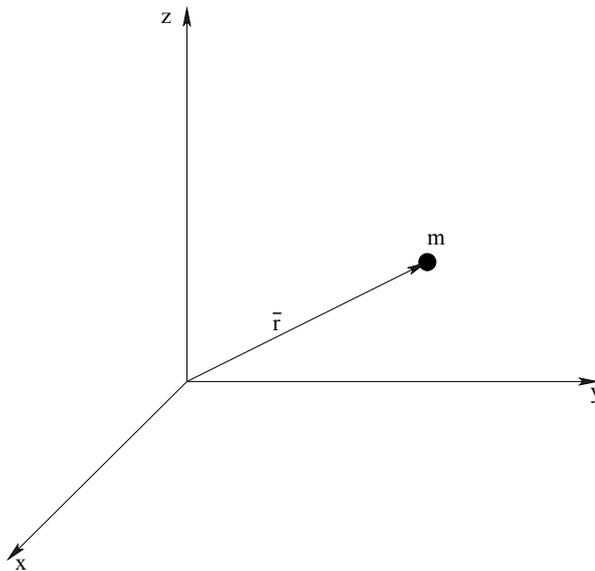
Τμήμα Φυσικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τρισδιάστατες κινήσεις

Οι μονοδιάστατες κινήσεις είναι εύκολες, αλλά ζούμε σε τρισδιάστατο χώρο. Θα δούμε λοιπόν τώρα πως θα αντιμετωπίζουμε την κίνηση υλικού σημείου στις τρεις διαστάσεις.

Ας θεωρήσουμε τρισδιάστατο ορθογώνιο σύστημα αξόνων x, y, z και υλικό σημείο μάζας m στην τυχούσα θέση που έχει συντεταγμένες x, y, z .



Ορίζουμε το διάνυσμα θέσης \vec{r} του υλικού σημείου ως

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (2.1)$$

όπου $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y, z αντιστοίχως. Αν το υλικό σημείο κινείται, οι συντεταγμένες x, y, z είναι συναρτήσεις του χρόνου.

Επειδή οι άξονες x, y, z είναι σταθεροί, τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι σταθερά. Έτσι, αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (2.1) για να πάρουμε την ταχύτητα του υλικού σημείου, θα έχουμε

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k}. \quad (2.2)$$

Αν στο υλικό σημείο ασκείται δύναμη \vec{F} , ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα μας λέει

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{ή} \quad m\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} \quad \text{ή} \quad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (2.3)$$

όπου \vec{a} είναι η επιτάχυνση του υλικού σημείου. Η δύναμη \vec{F} μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο, τη θέση, την ταχύτητα κλπ.

Αντικαθιστώντας την (2.1) στην τελευταία από τις σχέσεις (2.3) και λαμβάνοντας υπόψη ότι το διάνυσμα της δύναμης έχει τρεις συνιστώσες, ας πούμε F_x, F_y, F_z , έχουμε

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + m \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j} + m \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad (2.4)$$

ή

$$\left(m \frac{d^2 x}{dt^2} - F_x \right) \hat{i} + \left(m \frac{d^2 y}{dt^2} - F_y \right) \hat{j} + \left(m \frac{d^2 z}{dt^2} - F_z \right) \hat{k} = 0. \quad (2.5)$$

Για να ισχύει η εξίσωση αυτή πάντοτε, πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} - F_x = 0 & \quad \text{ή} & \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} - F_y = 0 & \quad \text{ή} & \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} - F_z = 0 & \quad \text{ή} & \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1 Ανεξαρτησία των κινήσεων

Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι το πρόβλημα της τρισδιάστατης κίνησης υλικού σημείου είναι ισοδύναμο με τρεις μονοδιάστατες κινήσεις. Αυτό όμως είναι σωστό αν η συνιστώσα F_x εξαρτάται μόνο από τα t, x, u_x και όχι από τα y, z, u_y, u_z . Ομοίως για τα F_y και F_z . Σε τέτοια περίπτωση λέμε ότι έχουμε *ανεξαρτησία των κινήσεων*.

Έτσι, για τη δύναμη $\vec{F} = ax^2 \hat{i} + by^3 \hat{j} + c \hat{k}$, όπου a, b, c είναι σταθερές, έχουμε ανεξαρτησία των κινήσεων, ενώ για τη δύναμη $\vec{F} = a'x^2 y \hat{i} + b'xy^3 \hat{j} + c'xyz \hat{k}$, όπου a', b', c' είναι σταθερές, δεν έχουμε ανεξαρτησία των κινήσεων, διότι για να βρούμε την κίνηση στον άξονα x πρέπει να ξέρουμε την κίνηση στον άξονα y . Σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να λύσουμε και τις τρεις διαφορικές εξισώσεις ταυτοχρόνως, δηλαδή να τις λύσουμε ως σύστημα.

Παράδειγμα 2.1: Υλικό σημείο μάζας m , που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, βάλλεται υπό γωνία $\theta < \pi/2$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα $u_0 > 0$. Θεωρήστε ότι το πεδίο βαρύτητας είναι σταθερό με επιτάχυνση g και ότι δεν υπάρχει τριβή αέρα.

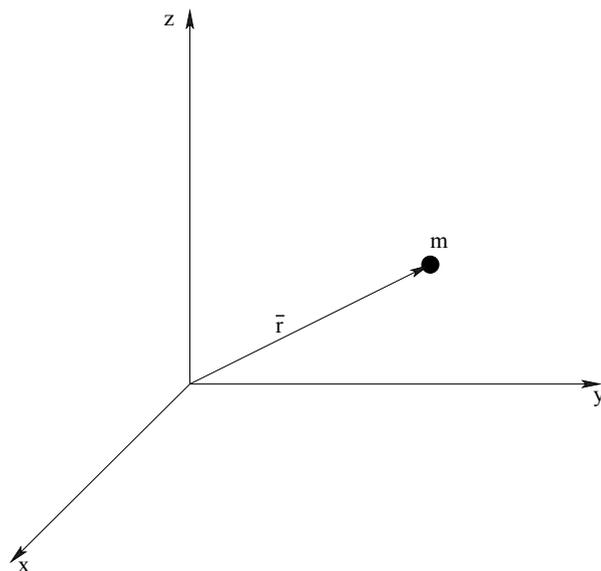
A) Να γραφεί η διανυσματική εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου.

Β) Θεωρώντας ότι η βολή γίνεται στο επίπεδο xz , να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης για τις δυο κινήσεις στους άξονες x και z .

Γ) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.

Δ) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) όλοι οι όροι στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \rightarrow \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Λύση:



A)
$$m \frac{d\bar{u}}{dt} = -mg\hat{k},$$

όπου $\bar{u} = \frac{d\bar{r}}{dt} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$. Ας γράψουμε και τις αρχικές συνθήκες, παρ' ότι δεν ζητούνται, θεωρώντας ότι η βολή γίνεται στο επίπεδο xz : $\bar{r}(0) = 0$ και $\bar{u}(0) = u_0(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{k})$.

B)
$$m \frac{du_x}{dt} = 0$$

$$m \frac{du_z}{dt} = -mg$$

Γ) Για την κίνηση στον άξονα x έχουμε:

$$\frac{du_x}{dt} = 0 \Rightarrow u_x = c_1,$$

όπου c_1 είναι πραγματική σταθερά. Από αυτήν έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \Rightarrow x = c_1 t + c_2,$$

όπου c_2 είναι πραγματική σταθερά. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ότι $x(0) = 0$ και $u_x(0) = u_0 \cos \theta$ έχουμε:

$$u_x(t) = u_0 \cos \theta \text{ και } x(t) = u_0 \cos \theta t.$$

Για την κίνηση στον άξονα z έχουμε:

$$\frac{du_z}{dt} = -g \Rightarrow du_z = -g dt \Rightarrow \int du_z = -g \int dt + A \Rightarrow u_z = -gt + A,$$

όπου A είναι πραγματική σταθερά. Από αυτήν έχουμε

$$\frac{dz}{dt} = -gt + A \Rightarrow dz = -gtdt + Adt \Rightarrow \int dz = -g \int tdt + A \int dt + B,$$

όπου B είναι πραγματική σταθερά. Τέλος έχουμε

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B.$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ότι $u_z(0) = u_0 \sin \theta$ και $z(0) = 0$ έχουμε:

$$u_z(t) = -gt + u_0 \sin \theta,$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + u_0 \sin \theta t.$$

Άρα, η λύση του δοθέντος προβλήματος είναι

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + z(t)\hat{k} = (u_0 \cos \theta t)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + u_0 \sin \theta t\right)\hat{k}.$$

Αυτήν την τροχιά θα ακολουθήσει το υλικό σημείο.

Δ) Παρατηρούμε ότι:

1. Οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται.
2. Όλοι οι όροι έχουν τις σωστές διαστάσεις.
3. Στον άξονα x η ταχύτητα είναι σταθερή και η θέση αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο, διότι η ασκούμενη δύναμη στο υλικό σημείο δεν έχει x συνιστώσα. Στον άξονα z έχουμε ελεύθερη πτώση στο σταθερό πεδίο βαρύτητας με αρχική ταχύτητα προς τα πάνω.

Παράδειγμα 2.2: Υλικό σημείο μάζας m , που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, βάλλεται υπό γωνία $\theta < \pi/2$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα

$u_0 > 0$. Η τριβή τού αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας του υλικού σημείου με σταθερά αναλογίας β . Θεωρείστε το πεδίο βαρύτητας σταθερό με επιτάχυνση g .

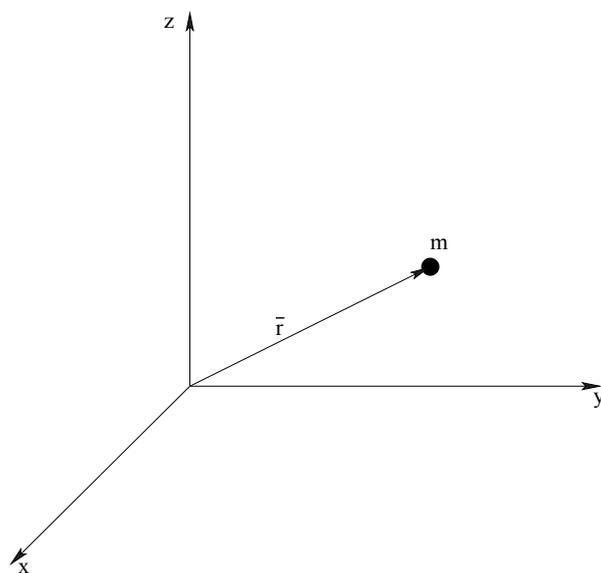
A) Να γραφεί η διανυσματική εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου.

B) Θεωρώντας ότι η βολή γίνεται στο επίπεδο yz , να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης για τις δυο κινήσεις στους άξονες y και z .

Γ) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.

Δ) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) όλοι οι όροι στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \rightarrow \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Λύση



A)
$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -mg\hat{k} - \beta\vec{u},$$

όπου $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Ας γράψουμε και τις αρχικές συνθήκες, παρ' ότι δεν ζητούνται, θεωρώντας ότι η βολή γίνεται στο επίπεδο yz : $\vec{r}(0) = 0$ και $\vec{u}(0) = u_0(\cos\theta\hat{j} + \sin\theta\hat{k})$.

B)
$$m \frac{du_y}{dt} = -\beta u_y$$

$$m \frac{du_z}{dt} = -mg - \beta u_z.$$

Γ) Για την κίνηση στον άξονα y έχουμε:

$$\frac{du_y}{dt} = -\frac{\beta}{m}u_y \Rightarrow \frac{du_y}{u_y} = -\frac{\beta}{m}dt \Rightarrow \int \frac{du_y}{u_y} = -\frac{\beta}{m} \int dt + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Συνεπώς

$$\ln|u_y| = -\frac{\beta}{m}t + c \Rightarrow |u_y| = e^{-\beta t/m} e^c \Rightarrow u_y = c_1 e^{-\beta t/m},$$

όπου τη θετική σταθερά e^c με αυθαίρετο πρόσημο τη γράψαμε ως πραγματική σταθερά c_1 .

Για την προβολή της κίνησης στον άξονα y , δηλαδή για το $y(t)$ έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = c_1 e^{-\beta t/m} \Rightarrow dy = c_1 e^{-\beta t/m} dt \Rightarrow \int dy = c_1 \int e^{-\beta t/m} dt + c_2 \Rightarrow$$

$$y(t) = -\frac{m}{\beta} c_1 e^{-\beta t/m} + c_2.$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ότι $y(0) = 0$ και $u_y(0) = u_0 \cos \theta$ έχουμε

$$u_y(t) = u_0 \cos \theta e^{-\beta t/m} \text{ και } y(t) = \frac{m u_0 \cos \theta}{\beta} (1 - e^{-\beta t/m}).$$

Για την κίνηση στον άξονα z έχουμε

$$\frac{du_z}{dt} = -\left(g + \frac{\beta}{m}u_z\right) \Rightarrow \frac{du_z}{g + \beta u_z/m} = -dt \Rightarrow \int \frac{du_z}{g + \beta u_z/m} = -\int dt + A,$$

όπου A είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Συνεπώς

$$\frac{m}{\beta} \ln|g + \beta u_z/m| = -t + A \Rightarrow \ln|g + \beta u_z/m| = -\beta t/m + \beta A/m \Rightarrow$$

$$|g + \beta u_z/m| = e^{-\beta t/m} e^{\beta A/m} \Rightarrow g + \beta u_z/m = B e^{-\beta t/m},$$

όπου τη θετική σταθερά $e^{\beta A/m}$ με αυθαίρετο πρόσημο τη γράψαμε ως πραγματική σταθερά B . Συνεπώς έχουμε για την προβολή της ταχύτητας στον άξονα y

$$u_z(t) = \frac{m}{\beta} (B e^{-\beta t/m} - g).$$

Για την προβολή της κίνησης στον άξονα z , δηλαδή για το $z(t)$ έχουμε

$$\frac{dz}{dt} = \frac{m}{\beta} (Be^{-\beta t/m} - g) \Rightarrow dz = \frac{m}{\beta} (Be^{-\beta t/m} - g) dt \Rightarrow \int dz = \frac{m}{\beta} \int (Be^{-\beta t/m} - g) dt + C$$

όπου C είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Συνεπώς,

$$z(t) = -\frac{m^2}{\beta^2} Be^{-\beta t/m} - \frac{mg}{\beta} t + C.$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ότι $u_z(0) = u_0 \sin \theta$ και $z(0) = 0$ έχουμε

$$u_z(t) = \frac{mg}{\beta} \left(e^{-\beta t/m} + \frac{\beta u_0 \sin \theta}{mg} e^{-\beta t/m} - 1 \right)$$

$$z(t) = \frac{m^2}{\beta^2} \left(g + \frac{\beta u_0 \sin \theta}{m} \right) (1 - e^{-\beta t/m}) - \frac{mg}{\beta} t.$$

Άρα, η λύση του δοθέντος προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \\ &= \frac{mu_0 \cos \theta}{\beta} (1 - e^{-\beta t/m})\hat{j} + \left[\frac{m^2}{\beta^2} \left(g + \frac{\beta u_0 \sin \theta}{m} \right) (1 - e^{-\beta t/m}) - \frac{mg}{\beta} t \right] \hat{k}. \end{aligned}$$

Αυτήν την τροχιά θα ακολουθήσει το υλικό σημείο.

Δ) Παρατηρούμε ότι:

1. Οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται.
2. Όλοι οι όροι έχουν τις σωστές διαστάσεις. Οι εκθέτες είναι αδιάστατοι, όπως πρέπει.
3. Στον άξονα y η ταχύτητα μηδενίζεται για $t \rightarrow \infty$ αφού μόνο δύναμη τριβής ασκείται. Αφού η ταχύτητα μηδενίζεται εκθετικά, η θέση τείνει σε οριακή τιμή.
Στον άξονα z για $t \rightarrow \infty$ η δύναμη τριβής εξουδετερώνει τη δύναμη της βαρύτητας και η ταχύτητα τείνει σε οριακή τιμή. Το z τείνει στο $-\infty$, όπως αναμένεται.

Παράδειγμα 2.3: Για ποιο από τα παρακάτω πεδία δυνάμεων $\vec{F}(x, y, z)$ μπορούμε να πούμε ότι ισχύει η ανεξαρτησία των κινήσεων στους τρεις άξονες και γιατί;

A) $\vec{F}(x, y, z) = F_0\hat{i} + F_0\hat{j} + F_0\hat{k}$, $F_0 = \text{σταθερά}$

B) $\vec{F}(x, y, z) = F_0 \frac{x}{x_0} \hat{i} + F_0 \frac{y}{y_0} \hat{j} + F_0 \hat{k}$, $F_0, x_0, y_0 = \text{σταθερές}$

Γ) $\vec{F}(x, y, z) = F_0 \frac{y}{y_0} \hat{i} + F_0 \frac{x}{x_0} \hat{j} + F_0 \hat{k}$, $F_0, x_0, y_0 = \text{σταθερές}$

$$Δ) \vec{F}(x, y, z) = F_1 \frac{xy}{x_0^2} \hat{i} + F_1 \frac{xy}{y_0^2} \hat{j} + F_1 \frac{z}{z_0} \hat{k}, \quad F_1, x_0, y_0 = \text{σταθερές}$$

$$Ε) \vec{F}(x, y, z) = F_2 \frac{x^2}{x_0^2} \hat{i} + F_2 \frac{y^2}{y_0^2} \hat{j} + F_2 \frac{z^2}{z_0^2} \hat{k}, \quad F_2, x_0, y_0, z_0 = \text{σταθερές}$$

$$ΣΤ) \vec{F}(x, y, z) = F_0 \frac{z^2}{z_0^2} \hat{i} + F_1 \frac{x^2}{x_0^2} \hat{j} + F_2 \frac{y^2}{y_0^2} \hat{k}, \quad F_0, F_1, F_2, x_0, y_0, z_0 = \text{σταθερές}$$

$$Ζ) \vec{F}(x, y, z) = F_0 \frac{x^2 z^2}{z_0^4} \hat{i} + F_1 \frac{y^2 x^2}{x_0^4} \hat{j} + F_2 \frac{z^2 y^2}{y_0^4} \hat{k}, \quad F_0, F_1, F_2, x_0, y_0, z_0 = \text{σταθερές}$$

Λύση:

Ας θεωρήσουμε το πιο γενικό πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z) \hat{i} + F_y(x, y, z) \hat{j} + F_z(x, y, z) \hat{k}.$$

Η διανυσματική εξίσωση κίνησης υλικού σημείου μάζας m υπό την επίδραση της ως άνω δύναμης είναι

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(x, y, z),$$

η οποία υπό μορφή συνιστωσών γράφεται

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(x, y, z).$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(x, y, z),$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(x, y, z).$$

Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να λύσουμε μόνη της την πρώτη εξίσωση ως προς x αν η F_x εξαρτάται από τα y και z . Ομοίως για τη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση.

Άρα το πιο γενικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z)$ για το οποίο μπορούμε να πούμε ότι ισχύει η ανεξαρτησία των κινήσεων στους τρεις άξονες είναι

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x) \hat{i} + F_y(y) \hat{j} + F_z(z) \hat{k}.$$

Με αυτό υπ' όψιν, συμπεραίνουμε ότι για τα πεδία δυνάμεων Α, Β και Ε έχουμε ανεξαρτησία των κινήσεων, ενώ για τα υπόλοιπα δεν έχουμε.

2.2 Εύρεση δύναμης από την τροχιά

Μέχρι τώρα έχουμε δει ότι αν μας δίνεται η δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο, τότε από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα και τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε την τροχιά που θα κάνει το υλικό σημείο. Τώρα θα αντιστρέψουμε το πρόβλημα. Έστω ότι μας δίνεται η τροχιά $\vec{r} = \vec{r}(t)$ που ακολουθεί ένα υλικό σημείο. Μπορούμε να βρούμε τη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο; Η απάντηση είναι, ναι, πολύ εύκολα. Αρκεί να παραγωγίσουμε την εξίσωση της τροχιάς δυο φορές ως προς τον χρόνο και να πολλαπλασιάσουμε με τη μάζα του υλικού σημείου.

Παράδειγμα 2.4: Θεωρείστε ότι υλικό σημείο μάζας m κάνει κυκλική τροχιά ακτίνας R στο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Τι δύναμη ασκείται στο υλικό σημείο;

Λύση: Ας θεωρήσουμε σύστημα συντεταγμένων xy , περιφέρεια κύκλου ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων, καθώς και υλικό σημείο μάζας m που κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω στην περιφέρεια του κύκλου. Την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο έχει συντεταγμένες x, y , που ικανοποιούν τη σχέση $x^2 + y^2 = R^2$. Η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}.$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα \vec{r} με τον άξονα x . Επειδή το υλικό σημείο κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $d\theta/dt = \omega = \text{σταθερά}$, έχουμε ότι $\theta = \theta(t) = \omega t$, όπου θεωρήσαμε ότι για $t = 0$ το υλικό σημείο ήταν στον άξονα x στη θέση $x = R$. Έτσι η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = R\cos\omega t\hat{i} + R\sin\omega t\hat{j}.$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = m\frac{d}{dt}\left[\frac{d(R\cos\omega t\hat{i} + R\sin\omega t\hat{j})}{dt}\right] \\ &= m\frac{d}{dt}\left[-R\omega\sin\omega t\hat{i} + R\omega\cos\omega t\hat{j}\right] = -mR\omega^2\cos\omega t\hat{i} - mR\omega^2\sin\omega t\hat{j} \\ &= -m\omega^2(R\cos\omega t\hat{i} + R\sin\omega t\hat{j}) = -m\omega^2\vec{r}.\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η δύναμη είναι κεντρομόλος και έχει μέτρο $m\omega^2|\vec{r}| = m\omega^2R$.

Παράδειγμα 2.5: Θεωρείστε ότι υλικό σημείο μάζας m κάνει κυκλική τροχιά ακτίνας R στο οριζόντιο επίπεδο με μη σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega(t)$. Τι δύναμη ασκείται στο υλικό σημείο;

Λύση: Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}.$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα \vec{r} με τον άξονα x . Επειδή το υλικό σημείο κινείται με μη σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega(t)$, έχουμε

$$d\theta/dt = \omega(t) \Rightarrow \theta(t) = \int_0^t \omega(t') dt', \text{ όπου θεωρήσαμε ότι για } t=0 \text{ το υλικό σημείο}$$

ήταν στον άξονα x στη θέση $x = R$. Έτσι η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = R\cos\theta(t)\hat{i} + R\sin\theta(t)\hat{j}.$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right] = m \frac{d}{dt} \left[\frac{d(R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j})}{dt} \right] \\ &= m \frac{d}{dt} \left[-R \frac{d\theta}{dt} \sin\theta\hat{i} + R \frac{d\theta}{dt} \cos\theta\hat{j} \right] = m \frac{d}{dt} \left[-R\omega \sin\theta\hat{i} + R\omega \cos\theta\hat{j} \right]. \end{aligned}$$

Για να συνεχίσουμε τις πράξεις πρέπει να προσέξουμε ότι τόσο το θ όσο και το ω είναι συναρτήσεις του χρόνου. Έτσι γράφουμε βάσει του κανόνα παραγώγισης γινομένου

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -mR \frac{d\omega}{dt} \sin\theta\hat{i} - mR\omega \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + mR \frac{d\omega}{dt} \cos\theta\hat{j} - mR\omega \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \\ &= -mR\alpha \sin\theta\hat{i} - mR\omega \cos\theta \omega \hat{i} + mR\alpha \cos\theta\hat{j} - mR\omega \sin\theta \omega \hat{j} \\ &= -m\omega^2 R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) + mR\alpha(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}), \end{aligned}$$

όπου τη γωνιακή επιτάχυνση $d\omega/dt$ τη συμβολίσαμε με α .

Το διάνυσμα που είναι στην πρώτη παρένθεση είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{R} = \frac{R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})}{R} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j},$$

ενώ το διάνυσμα που είναι στη δεύτερη παρένθεση είναι το μοναδιαίο επιτρόχιο διάνυσμα

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}.$$

Για να βεβαιωθούμε ότι είναι έτσι, ας εξετάσουμε την κατεύθυνση του διανύσματος $\hat{\theta}$ για διάφορες τιμές της γωνίας θ .

Για $\theta = 0$ έχουμε $\hat{\theta} = 0\hat{i} + 1\hat{j} = \hat{j}$. Είναι παράλληλο προς τον άξονα y (δείχνει προς τα θετικά του), δηλαδή κάθετο στον άξονα x , άρα είναι εφαπτόμενο του κύκλου.

Για $\theta = \pi/2$ έχουμε $\hat{\theta} = -\hat{i}$. Είναι παράλληλο προς τον άξονα x (δείχνει προς τα αρνητικά του), δηλαδή κάθετο στον άξονα y , άρα είναι εφαπτόμενο του κύκλου.

Για $\theta = \pi$ έχουμε $\hat{\theta} = -\hat{j}$. Είναι παράλληλο προς τον άξονα y (δείχνει προς τα αρνητικά του), δηλαδή κάθετο στον άξονα x , άρα είναι εφαπτόμενο του κύκλου.

Για $\theta = 3\pi/2$ έχουμε $\hat{\theta} = \hat{i}$. Είναι παράλληλο προς τον άξονα x (δείχνει προς τα θετικά του), δηλαδή κάθετο στον άξονα y , άρα είναι εφαπτόμενο του κύκλου.

Για τυχούσα γωνία θ , αν κάνουμε παράλληλη μετατόπιση του $\hat{\theta}$ στην αρχή των αξόνων και υπολογίσουμε τις συνιστώσες του στους άξονες x και y , βρίσκουμε ότι αυτές είναι $-\sin\theta$ και $\cos\theta$ αντιστοίχως.

Έτσι η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο είναι

$$\hat{F} = -m\omega^2 R \hat{r} + mR\alpha \hat{\theta},$$

Δηλαδή έχει ακτινική συνιστώσα με μέτρο $m\omega^2 R$ και επιτρόχια συνιστώσα με μέτρο $mR\alpha$. Η ακτινική συνιστώσα (κεντρομόλος) το κρατάει σε κυκλική τροχιά και η επιτρόχια συνιστώσα το επιταχύνει ή το επιβραδύνει ανάλογα με το πρόσημο του α .

Προσοχή: Όπως είπαμε παραπάνω,

$$d\theta/dt = \omega(t) \Rightarrow \theta(t) = \int_0^t \omega(t') dt'.$$

Έτσι, αν π.χ., $\omega(t) = \omega_0 \frac{t}{t_0}$, όπου ω_0, t_0 είναι σταθερές, έχουμε

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \omega_0 \frac{t^2}{t_0} = \frac{1}{2} \omega(t)t \quad \text{και όχι} \quad \omega(t)t !!!$$

Άσκηση 2.1: Χρησιμοποιώντας τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα,

A) δείξτε ότι αν ένα υλικό σημείο μάζας m εκτελεί κίνηση στον άξονα x , η οποία περιγράφεται από τη σχέση $x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$, όπου $A, B, \omega = \sqrt{k/m}$ είναι πραγματικές σταθερές, η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο είναι δύναμη ελατηρίου σταθεράς k .

B) Τι διαφορά υπάρχει μεταξύ του παραπάνω $x(t)$, του $x(t) = C \sin(\omega t + \phi)$, όπου C, ϕ είναι πραγματικές σταθερές και του $x(t) = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}$, όπου C_1, C_2 είναι μγαδικές σταθερές;

Άσκηση 2.2: Σε μονοδιάστατα προβλήματα κίνησης υλικού σημείου μάζας m και δυναμικής ενέργειας $V(x)$ η ταχύτητα του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}, \quad \text{όπου } E \text{ είναι η } \underline{\text{σταθερή}} \text{ ολική ενέργεια. Χρησιμοποιώντας}$$

τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, να βρείτε το πεδίο δυνάμεων $F(x)$ αν $V(x) = \lambda x^2$, $\lambda > 0$.

Άσκηση 2.3: Θεωρείστε τον Ήλιο μάζας M σαν σημείο στην αρχή των αξόνων xy . Η Γη με μάζα m (θεωρείστε την σαν σημείο) κινείται γύρω από τον Ήλιο.

A) Να γραφεί η διανυσματική εξίσωση κίνησης της Γης καθώς και οι εξισώσεις κίνησης για τους άξονες x και y .

B) Υπάρχει ανεξαρτησία των κινήσεων;

Γ) Δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης επιτρέπουν στη Γη να κάνει κύκλο ακτίνας R αν η γωνιακή ταχύτητά της είναι $\omega = \sqrt{GM / R^3}$.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ν. Κυλάφης, 2014. «Γενική Φυσική Ι.». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

