



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

---

## Γενική Φυσική Ι

Ν. Κυλάφης

Τμήμα Φυσικής

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τις μαθηματικές έννοιες του *εσωτερικού* και του *εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων*.

Ας θεωρήσουμε τα τυχόντα διανύσματα  $\vec{A}$  και  $\vec{B}$ . Τα διανύσματα αυτά ορίζουν ένα επίπεδο και ας θεωρήσουμε ότι η μεταξύ τους γωνία είναι  $\theta < \pi$ .

**Ορισμός:** Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{A}$  και  $\vec{B}$  συμβολίζεται ως  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , είναι βαθμωτό μέγεθος και ορίζεται ως

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = |\vec{A}| (|\vec{B}| \cos \theta) = (|\vec{A}| \cos \theta) |\vec{B}|. \quad (6.1)$$

Με άλλα λόγια, το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων ορίζεται ως το μέτρο του ενός διανύσματος, επί το μέτρο του άλλου διανύσματος, επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων ορίζεται ως το μέτρο του ενός διανύσματος επί την προβολή του άλλου διανύσματος σ' αυτό.

**Ορισμός:** Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{A}$  και  $\vec{B}$  συμβολίζεται ως  $\vec{A} \times \vec{B}$ , είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &\equiv (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &\equiv (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ισοδύναμος με αυτόν τον ορισμό είναι ο ακόλουθος:

**Ορισμός:** Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{A}$  και  $\vec{B}$  είναι ένα διάνυσμα  $\vec{C}$ , κάθετο και στα δυο διανύσματα  $\vec{A}$  και  $\vec{B}$ , που ορίζεται ως εξής: Το μέτρο του είναι

$$|\vec{C}| \equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta = |\vec{A}| (|\vec{B}| \sin \theta) = (|\vec{A}| \sin \theta) |\vec{B}|, \quad (6.3)$$

και η κατεύθυνσή του δίνεται από τον *κανόνα του δεξιού χεριού*. Η κατεύθυνση του  $\vec{C}$  δίνεται από τον μεσαίο δάκτυλο, αν στον αντίχειρα βάλομε το διάνυσμα  $\vec{A}$ , στον δείκτη το διάνυσμα  $\vec{B}$  και έχομε τα τρία δάκτυλα κάθετα μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, το διάνυσμα  $\vec{C}$  έχει την κατεύθυνση του *δεξιόστροφου κοχλίου* (βίδας). Αν

στρίψομε το διάνυσμα  $\vec{A}$  προς το διάνυσμα  $\vec{B}$ , ο κοχλίας θα προχωρήσει προς την κατεύθυνση του διανύσματος  $\vec{C}$ .

Από την πρώτη σχέση (6.3) συμπεραίνουμε ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων ισούται με το εμβαδό του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δυο διανύσματα. Από τις άλλες δυο σχέσεις (6.3) συμπεραίνουμε ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων ισούται με το μέτρο του ενός επί την κάθετη συνιστώσα του άλλου σ' αυτό.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι το εξωτερικό γινόμενο δυο συγγραμμικών (παραλλήλων ή αντι-παραλλήλων) διανυσμάτων ισούται με το μηδέν διότι  $\theta = 0$  ή  $\theta = \pi$ . Επίσης, από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου προκύπτει ότι

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (6.4)$$

Επίσης, για τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}. \quad (6.5)$$

# Σημειώματα

## Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ν. Κυλάφης, 2014. «Γενική Φυσική Ι.». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

