



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ασκήσεις 1: Μιγαδικοί αριθμοί, μιγαδικές συναρτήσεις και παραγωγή τους

Μαρία Καφεσάκη

Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

ΤΕΤΥ - ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ασκήσεις 1 : Μιγαδικοί αριθμοί, μιγαδικές συναρτήσεις και παραγώγισή τους

1. Βρείτε το μέτρο και το όρισμα του $z = 3 + 2i$ και του συζυγούς του. Ποιο είναι το βασικό όρισμα του z ($\text{Arg}(z)$);
2. Βρείτε το μέτρο και το βασικό όρισμα των $z = -2i$, $z = -2$, $z = 1 + i$, $z = -1 - i$. Παραστήστε τους γραφικά.
3. Υπολογίστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των αριθμών $w_1 = e^{iz}/z$ και $w_2 = e^{z^2}/z^*$, όπου $z = x + iy$, συναρτήσει των x και y .
4. Υπολογίστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των αριθμών $z_1 = e^{i\pi/4}/(1 + i)$ και $z_2 = e^{1+i\pi/2}/(1 - i)$.
5. Αποδείξτε ότι $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ και $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
6. Αναπαραστήστε στο επίπεδο τον $z = 3 + 2i$ και τον συζυγή του.
7. Γράψτε τον συζυγή του $z = (x + 5i)^{3y+2ix}$, x, y πραγματικοί. Το ίδιο για τον $z = (w + i)^{3w}$, w μιγαδικός.
8. Γράψτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των $w_1 = e^z$, $w_2 = e^{z^2}$ και $w_3 = 2^z$, με $z = x + iy$.
9. Για να περιγράψει η συνάρτηση e^{ikx} , όπου k μιγαδικός, απεσβενυμένο κύμα, ποιο θα πρέπει να είναι το πρόσημο του φανταστικού μέρους του k ;
10. Αποδείξτε τις σχέσεις: (i) $\cos(i\theta) = \cosh \theta$ και (ii) $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$.
11. Δείξτε ότι για $z = e^{i\theta}$ ισχύει $z^n + 1/z^n = 2 \cos(n\theta)$.
12. Βρείτε τις τέταρτες ρίζες της μονάδας και του i . Παραστήστε τις γραφικά. Βρείτε τις $\sqrt{-4}$.
13. Βρείτε τα $\ln(-1)$, $\ln(i)$ και $\ln(i^4)$.
14. Δείξτε ότι η $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε z . Βρείτε την παράγωγό της.
15. Εξετάστε αν είναι αναλυτικές οι εξής συναρτήσεις: $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$, $f(z) = x$, $f(z) = 2x + 2ixy$.
16. Είναι η $f(z) = z - z^*$ αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο;
17. Βρείτε την παράγωγο των $\cosh z$ και $\sinh z$.
18. Βρείτε και ταξινομήστε τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων $1/(z - 1)^2$, $e^{1/z}$, $\sqrt{z - 1}$ και $\tan z$.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Μαρία Καφεσάκη. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Ασκήσεις 1: Μιγαδικοί αριθμοί, μιγαδικές συναρτήσεις και παραγωγή τους». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr/courses/course/view.php?id=337>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

