ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Σημειώσεις: Δειγματοληψία

Γιώργος Τζιρίτας
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Κεφάλαιο 5

Δειγματοληψία

Έστω ένα σύνολο περιοδικά διαταγμένων σημείων στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο αυτό δίδει τα σημεία όπου θα ληφθούν δείγματα από το συνεχές σήμα. Ας είναι T η περίοδος της δειγματοληψίας. Με βάση την ιδιότητα της κατανομής Dirac,

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0),$$

για εξαγωγή δειγμάτων από ένα σήμα, ορίζεται η 'συνάρτηση' δειγματοληψίας

$$s(t) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT).$$

Το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας του σήματος $f(t)$ είναι το γινόμενο αυτού του σήματος με τη 'συνάρτηση' δειγματοληψίας

$$f_s(t) = s(t)f(t),$$

που δίδει

$$f_s(t) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT).$$

Η δειγματοληψία συνεπάγεται περιοδικοποίηση στο φάσμα των συχνοτήτων. Πράγματι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $f_s(t)$ προκύπτει από τη συνέλιξη του $F(\omega)$ με το $S(\omega)$, το μετασχηματισμό Fourier της $s(t)$. Επειδή η $s(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση, μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια μιας σειράς Fourier, που είναι η ακόλουθη

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi n\frac{t}{T}},$$

αφού οι συντελεστές αυτής της σειράς Fourier είναι ίσοι με τη μονάδα.

Οπότε βρίσκουμε

$$S(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T}).$$

Επομένως το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-\frac{2\pi n}{T}).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς περιοδική, με περίοδο τη συχνότητα δειγματοληψίας $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

Στο ζήτημα αν είναι δυνατό να ανακατασκευασθεί το συνεχές σήμα από τα περιοδικά του δείγματα όπως ορίσθηκαν προηγούμενα απαντά το θεώρημα της δειγματοληψίας.

Θεώρημα δειγματοληψίας

Αν το σήμα $f(t)$ είναι πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων, δηλαδή, αν

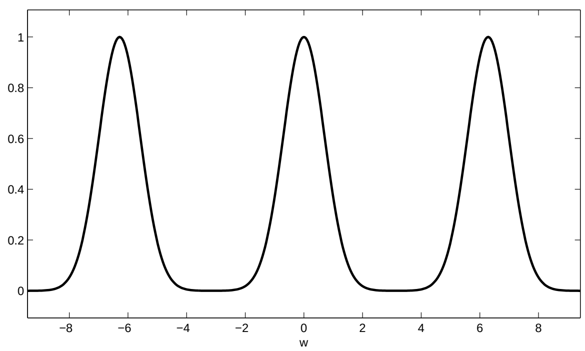
$$F(\omega) = 0, |\omega| > \omega_M,$$

τότε αρκεί η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα Nyquist,

$$\omega_s > 2\omega_M,$$

για να μπορεί να αποκατασταθεί τέλεια το συνεχές σήμα από το διακριτό που δίδει η δειγματοληψία.

Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται η περιοδικοποίηση του φάσματος των συχνοτήτων λόγω δειγματοληψίας σε συνθήκες ισχύος του θεωρήματος της δειγματοληψίας. Η ανακατασκευή του συνεχούς σήματος επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας ένα φίλτρο που δίδει τέλεια την κύρια περίοδο του $F_s(\omega)$



Σχήμα 5.1: Περιοδικοποίηση του φάσματος

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Προφανώς έχουμε

$$F(\omega) = H(\omega)F_s(\omega).$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $H(\omega)$ είναι

$$h(t) = \frac{1}{T}\mathrm{sinc}\frac{\pi t}{T},$$

όπου $\mathrm{sinc}x = \frac{\sin x}{x}$. Οπότε η παρεμβολή για οποιαδήποτε τιμή του t δίδεται από την ακόλουθη συνέλιξη

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\mathrm{sinc}\frac{\pi(t-nT)}{T}.$$

Αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι κάτω από τη συχνότητα Nyquist, τότε προκύπτουν επικαλύψεις στο φάσμα των συχνοτήτων, μ' αποτέλεσμα να είναι αδύνατο να ανακτηθεί τέλεια το συνεχές σήμα. Οι συχνότητες που λόγω επικάλυψης αλλάζουν θέση ονομάζονται ψευδώνυμες, και εισάγουν παραμόρφωση στο συνεχές σήμα. Συνεπώς τότε οι παραπάνω εξισώσεις δεν ισχύουν. Για τον περιορισμό αυτής της παραμόρφωσης συνιστάται η χρήση του φίλτρου $H(\omega)$ πριν τη δειγματοληψία.

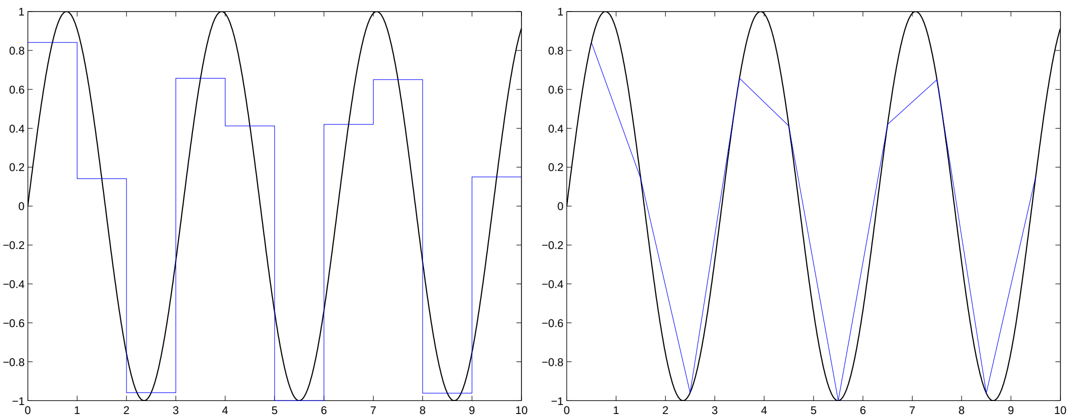
Παράδειγμα 5.1. Ας θεωρήσουμε ένα σήμα με μια καθαρή συχνότητα $\omega_M = 3$, $f(t) = \cos 3t$. Για να μην εμφανισθούν ψευδώνυμες συχνότητες θα πρέπει η συχνότητα της δειγματοληψίας να είναι μεγαλύτερη από $2\omega_M$. Αν ωστόσο υποθέσουμε ότι η δειγματοληψία γίνεται με συχνότητα $\omega_s = 4$, τότε η αναδίπλωση του φάσματος παράγει μια καθαρή συχνότητα $\omega = 1$ και το σήμα που ανακτάται είναι $\hat{f}(t) = \cos t$. Πράγματι τα δείγματα που λαμβάνονται είναι

$$\cos 3n\frac{\pi}{2} = \cos -n\frac{\pi}{2} = \cos n\frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Παραμόρφωση μπορεί επίσης να εισαχθεί, έστω κι αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος της δειγματοληψίας, αν το φίλτρο της παρεμβολής δεν είναι ιδανικό. Αν δηλαδή δεν χρησιμοποιηθεί το ιδανικό φίλτρο, που δεν είναι πρακτικά υλοποιήσιμο, αλλά κάποιο άλλο που να το προσεγγίζει, έχοντας για παράδειγμα πεπερασμένης διάρκειας απόκριση. Τέτοια φίλτρα παρεμβολής είναι τα ακόλουθα:

- $h_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & |t| \leqslant \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$
- $h_1(t) = h_0(t) * h_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & |t| < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $h_2(t) = h_1(t) * h_0(t)$

Στο Σχήμα 5.2 δίδεται η παρεμβολή με $h_0(t)$ και $h_1(t)$ για ένα ημιτονοειδές σήμα με αραιά δείγματα.



Σχήμα 5.2: Παρεμβολή από το πλησιέστερο δείγμα (h_0) ή τα δύο πλησιέστερα δείγματα (h_1).

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

Σημείωμα Αναφοράς