



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

---

## **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**

**Φροντιστήριο 3: Συνέλιξη σημάτων**

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

---

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς**

Φρονιστήριο σε συνέλιξη σημάτων (6-3-2015)

1. Να ευρεθεί η συνέλιξη του σήματος  $u(t - a)$  με το σήμα  $u(t - b)$ .

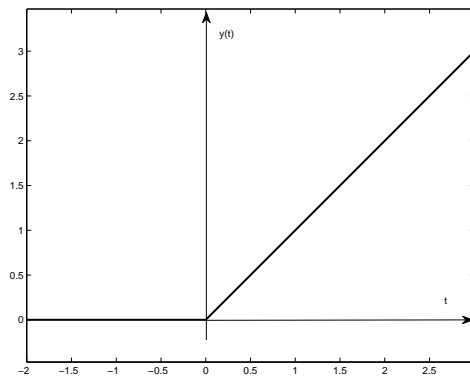
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - a)u(t - \tau - b)d\tau$$

Το ολοκλήρωμα θα είναι μη μηδενικό εφόσον

$$\tau - a \geq 0, t - \tau - b \geq 0 \iff a \leq \tau \leq t - b$$

Άρα

$$y(t) = u(t - a - b) \int_a^{t-b} d\tau = (t - a - b)u(t - a - b).$$



Σχήμα 1: Η συνέλιξη για  $a + b = 0$ .

2. Να ευρεθεί η συνέλιξη του σήματος  $u(t + T) - u(t - T)$  με το ίδιο.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u(\tau + T) - u(\tau - T))(u(t - \tau + T) - u(t - \tau - T))d\tau.$$

Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις

(a)  $t < -2T$

$$y(t) = 0.$$

(b)  $-2T \leq t < 0$

$$y(t) = \int_{-T}^{t+T} d\tau = t + 2T.$$

(c)  $0 \leq t \leq 2T$

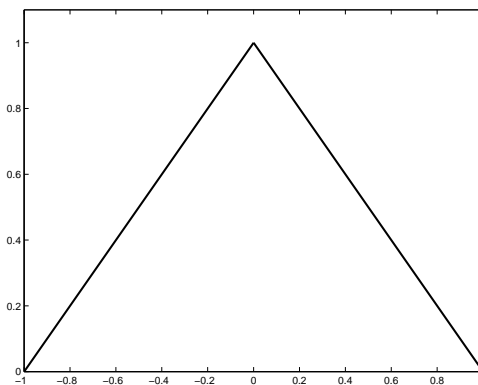
$$y(t) = \int_{t-T}^T d\tau = 2T - t.$$

(d)  $2T < t$

$$y(t) = 0.$$

Τελικά μπορούμε να γράψουμε

$$y(t) = (2T - |t|)(u(t + 2T) - u(t - 2T)).$$



Σχήμα 2: Η συνέλιξη για  $T = 0,5$ .

3. Να ευρεθεί η συνέλιξη του σήματος  $e^{-at}u(t)$  με το σήμα  $u(t)$ .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Το ολοκλήρωμα θα είναι μη μηδενικό εφόσον

$$\tau \geq 0, t - \tau \geq 0 \iff 0 \leq \tau \leq t$$

Άρα

$$y(t) = u(t) \int_0^t e^{-a(t-\tau)}d\tau = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t).$$

4. Να ευρεθεί η συνέλιξη του διακριτού σήματος  $a^n u(n)$  με το  $u(n)$  για  $|a| < 1$ .

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)a^{n-k}u(n-k) = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}u(n).$$

5. Να ευρεθεί η συνέλιξη του διακριτού σήματος  $a^n u(n)$  με το ίδιο.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)a^{n-k}u(n-k) = \sum_{k=0}^n a^n = (n+1)a^n u(n).$$

# Σημειώματα

## Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Φροντιστήριο 3: Συνέλιξη σημμάτων**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://elearn.uoc.gr/course/view.php?id=420/>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

