



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

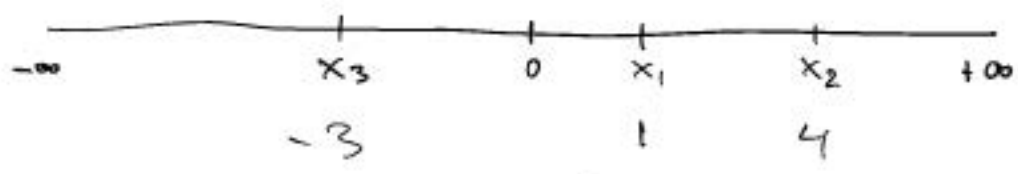
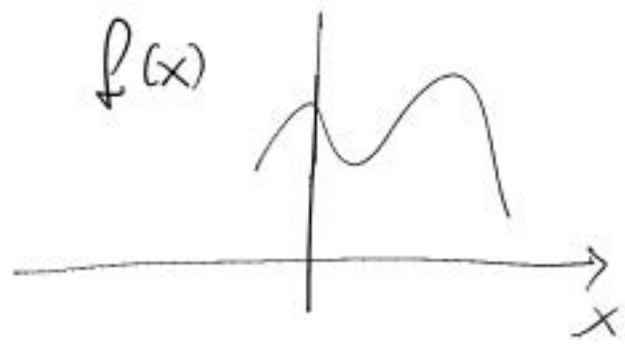
Διάλεξη 1η: Εισαγωγή στους Μιγαδικούς  
Αριθμούς

Ιωάννης Στυλιανού  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

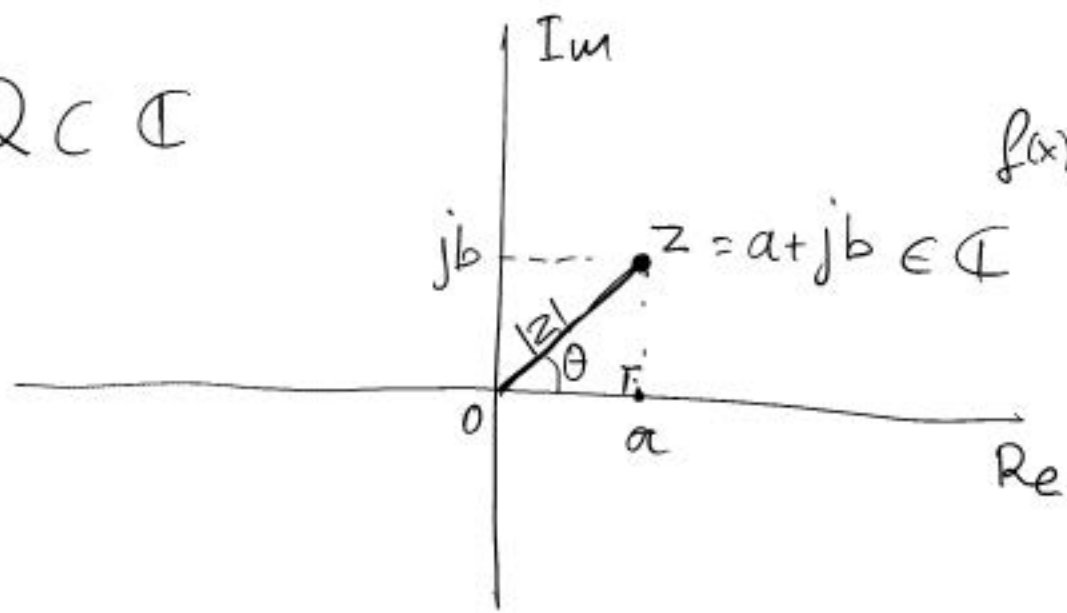
HY 215

Ei saywya!

$x \in \mathbb{R}$



$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



$$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm j$$

$$\boxed{j^2 = -1} \quad i$$

$$\text{Re}\{z\} = a$$

$$\text{Im}(z) = b$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \sin\theta$$

капцоуару  
купфун

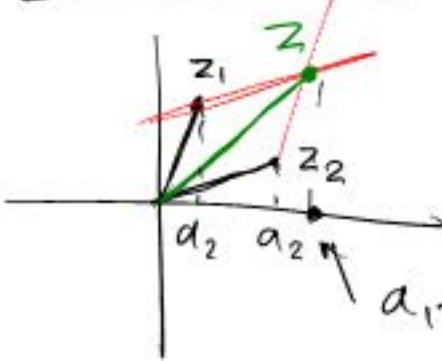
$$z = a + jb = |z| \cos\theta + j |z| \sin\theta = |z| e^{j\theta}$$

$$= |z| (\underbrace{\cos\theta + j \sin\theta}_{e^{j\theta}}) = |z| e^{j\theta}$$

Толик  
топфун

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta} \quad \text{Euler}$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$



$$z_1 = a_1 + jb_1$$

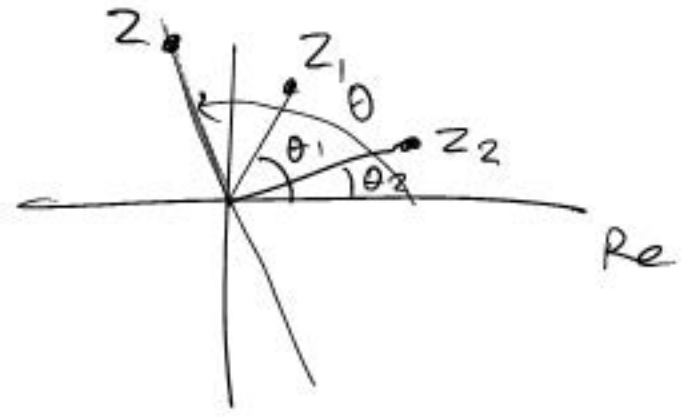
$$z_2 = a_2 + jb_2$$

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = \\ &= a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2) \\ &= a + jb \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad a_1 + a_2 \qquad b_1 + b_2 \end{aligned}$$

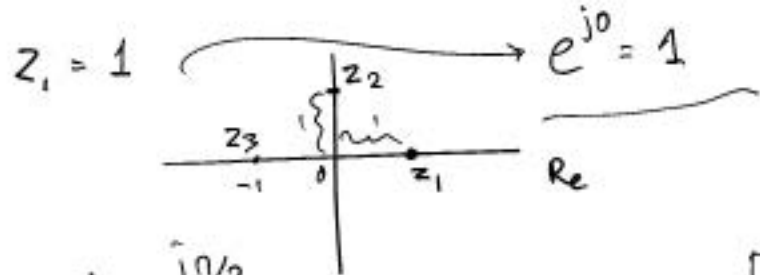
$$z = \alpha z_1 + \beta z_2$$

$$z = \sum_{k=1}^N w_k z_k$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$



$$\left. \begin{aligned} z_1 &= |z_1| \cdot e^{j\theta_1} \\ z_2 &= |z_2| \cdot e^{j\theta_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$



$$z_2 = j = e^{jn/2}$$

$$z_3 = -1 = |1| \cdot e^{jn} \Rightarrow e^{jn} = -1 \Rightarrow \boxed{e^{jn} + 1 = 0}$$

$$z_4 = -j = e^{j3n/2} = e^{-jn/2}$$

$$z_3 = -1 = j^2 = j \cdot j = e^{jn/2} \cdot e^{jn/2} = e^{jn} = -1$$

$|z| > 1$

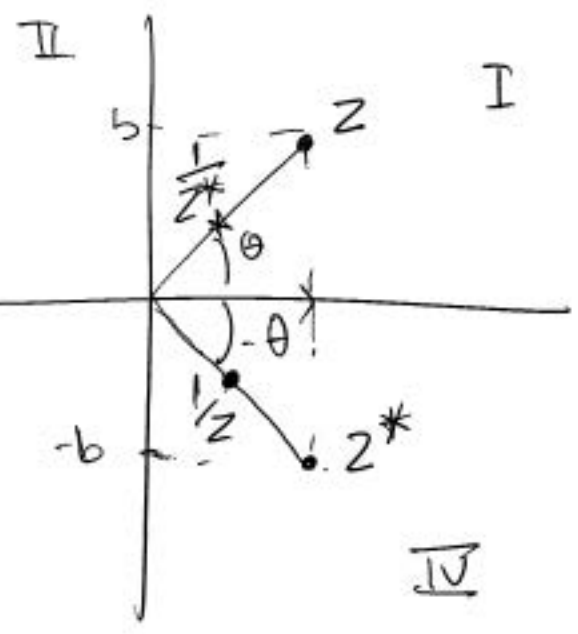
$$z = |z| e^{j\theta} \Rightarrow z^* = |z| e^{-j\theta}$$

$$e^{jn} = \cos n + j \sin n = -1 + j0 = -1$$

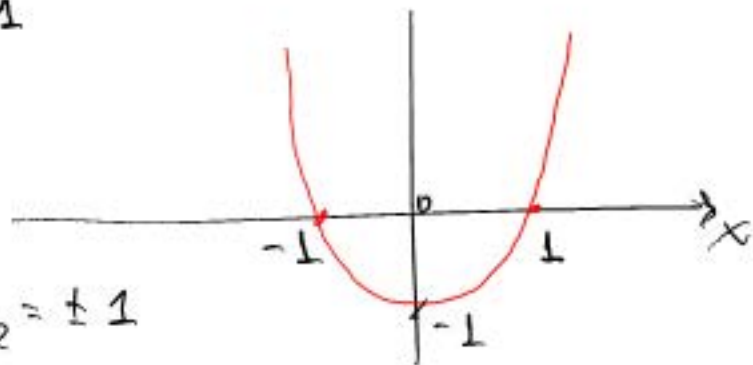
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{|z| \cdot e^{-j\theta}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} e^{-j\theta}$$

$$\frac{1}{z^*} = \frac{1}{|z| e^{-j\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{j\theta}$$

$$z \cdot z^* = |z|^2 \cdot e^{j(\theta - \theta)} = |z|^2 \cdot e^{j0} = |z|^2$$



$$x \xrightarrow{f} f(x) \quad \text{n.x. } f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

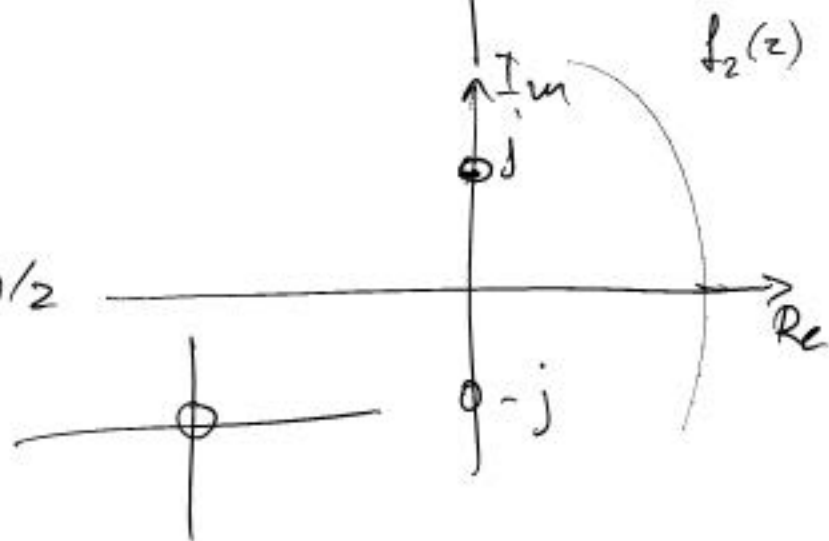
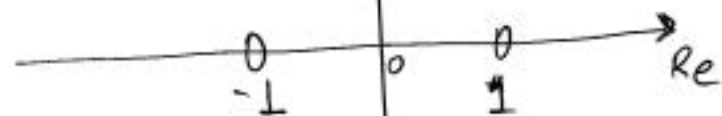
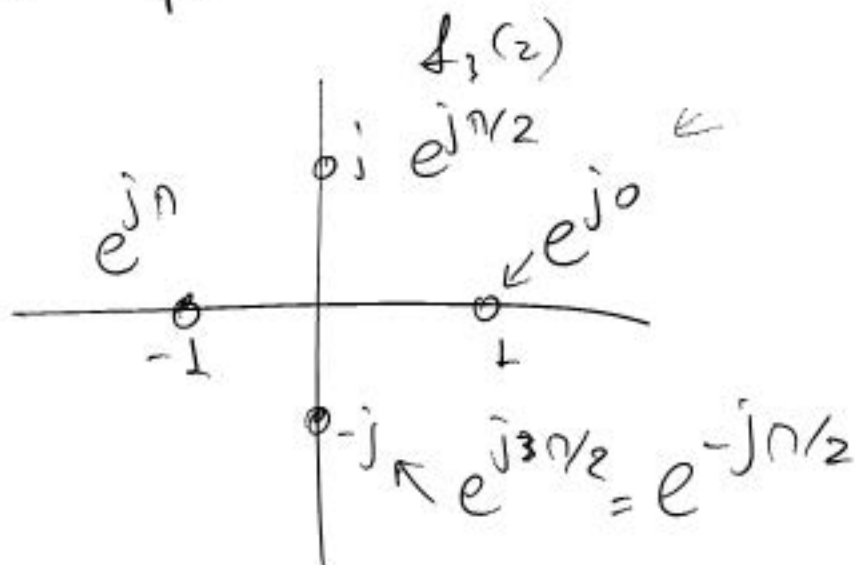


$$z \xrightarrow{f} f(z)$$

$$f_1(z) = z^2 - 1 \Rightarrow f_1(z) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 1$$

$$f_2(z) = z^2 + 1 \Rightarrow f_2(z) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm j$$

$$f_3(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = z^4 - 1$$



$$f_4(z) = f_1(z) + f_2(z) = 2z^2$$

$$f(z) = z^4 - 1 \Rightarrow f(z) = 0 \Rightarrow z^4 = 1 \Rightarrow |z|^4 \cdot e^{j4\theta} = |1| e^{jk2\pi} \rightarrow$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

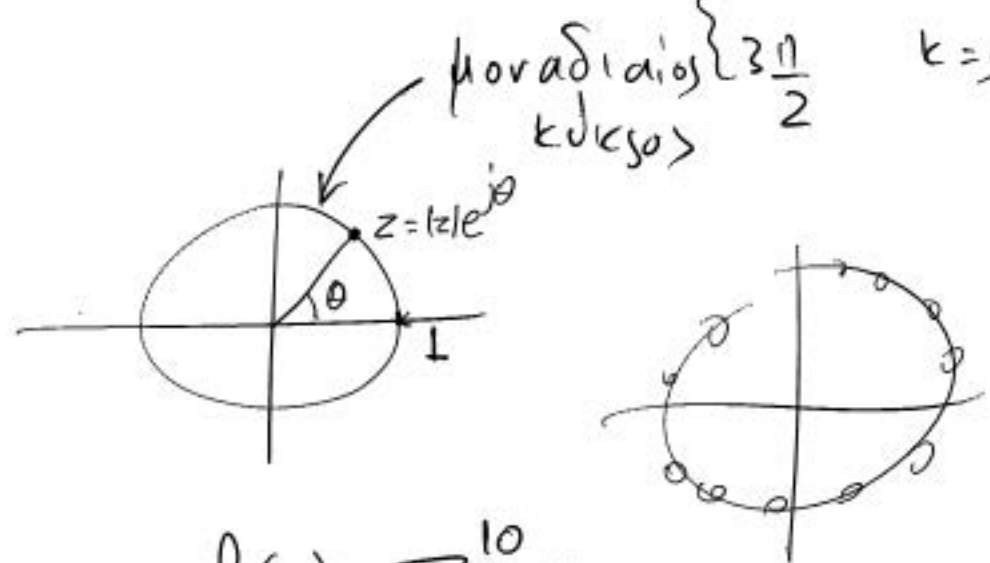
$$|z|e^{j\theta} \quad |1|e^{jk2\pi}$$

$$1 = |1| \cdot e^{j0} = |1| e^{jk2\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z|^4 = |1| \Rightarrow |z| = 1 \\ 4\theta_k = k2\pi \Rightarrow \theta_k = k \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- $k=0: z_0 = |1| \cdot e^{j0}$
- $k=1: z_1 = |1| \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$
- $k=2: z_2 = |1| \cdot e^{jn}$
- $k=3: z_3 = |1| \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}}$

- $\left. \begin{matrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{matrix}$



$$f(z) = z^{10} - \frac{1}{2}$$

$$f(z) = z^{10} - 1 = 0$$

$$z_k = |1| e^{jk \frac{\pi}{5}}$$

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
  - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
  - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
  - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Διάλεξη 1η: Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>