



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 4η: Διαμόρφωση AM

Διακρότημα

Περιοδικότητα

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 215

Diagefu 4

Euler

$$e^{j\theta(t)} = \cos\theta(t) + j\sin\theta(t)$$

$$\cos\theta(t) = \frac{e^{j\theta(t)} + e^{-j\theta(t)}}{2}$$

$$\sin\theta(t) = \frac{e^{j\theta(t)} - e^{-j\theta(t)}}{2j}$$

$$x_1(t) = \cos(10\pi t) = \frac{1}{2} e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j10\pi t}$$

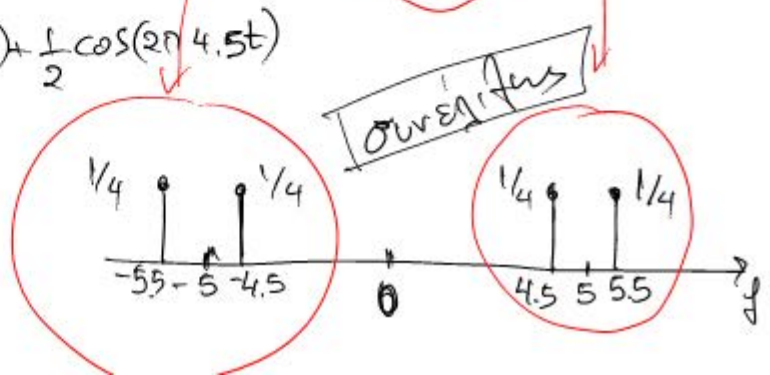
$\cos(2\pi f t) \downarrow f = 5 \text{ Hz}$

$$x_2(t) = \cos(\pi t) = \frac{1}{2} e^{j\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j\pi t}$$

$f = 0.5$

$$x(t) = x_1(t) x_2(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi 5.5t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 4.5t)$$

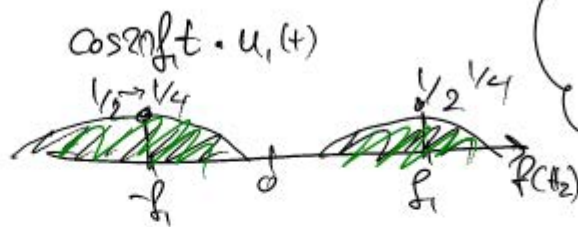
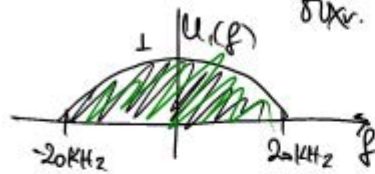
\downarrow
 Διακριτῶτων



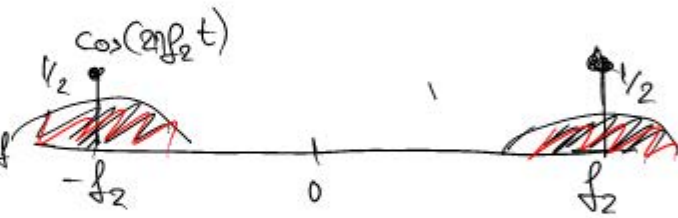
$x_1(t) = u_1(t) \cdot \cos(2\pi f_1 t)$ AM
 Πήληξη (φωνή) ← Γέφυρα δίκτυο

Amplitude Modulation
 Διαμόρφωση κατά ηχώ

$f = \frac{c}{\lambda}$



$x_2(t) = u_2(t) \cos(2\pi f_2 t)$



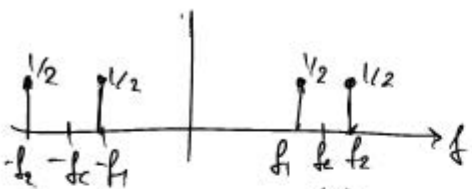
$u_1(t) \cos^2(2\pi f_1 t) = u_1(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 2f_1 t) \right)$
 $= u_1(t)/2 + u_1(t)/2 \cos(2\pi \cdot 2f_1 t)$

$x_1(t) \cdot \cos(2\pi f_1 t)$
 Ανοδιαφορέτης

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$

$$f_c = \frac{f_1 + f_2}{2}, \quad f_\Delta = \frac{f_2 - f_1}{2}$$

$$f_1 = f_c - f_\Delta, \quad f_2 = f_c + f_\Delta$$

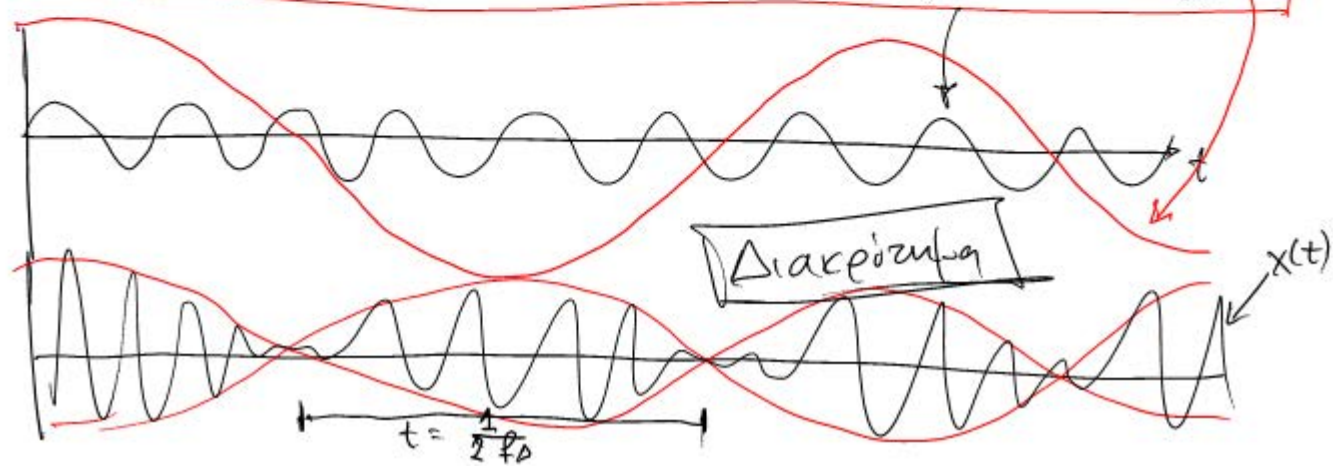


$$x(t) = \operatorname{Re}\{e^{j2\pi f_1 t}\} + \operatorname{Re}\{e^{j2\pi f_2 t}\}$$

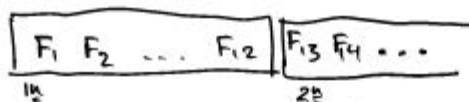
$$= \operatorname{Re}\{e^{j2\pi(f_c - f_\Delta)t}\} + \operatorname{Re}\{e^{j2\pi(f_c + f_\Delta)t}\} = \operatorname{Re}\{e^{j2\pi f_c t} (e^{-j2\pi f_\Delta t} + e^{j2\pi f_\Delta t})\} =$$

$$= 2 \cos(2\pi f_\Delta t) \cdot \operatorname{Re}\{e^{j2\pi f_c t}\} = 2 \cos(2\pi f_\Delta t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2 \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_\Delta t)$$



Οκτάβα : 12 νότες



$$F_{13} = 2F_1 \Rightarrow \frac{F_{13}}{F_1} = 2$$

$$\frac{F_2}{F_1} = r \times \frac{F_3}{F_2} = r \times \dots \times \frac{F_{13}}{F_{12}} = r \Rightarrow \frac{F_{13}}{F_1} = r^{12}$$

$$r^{12} = 2 \Rightarrow r = 2^{1/12} \approx 1.06$$

Πλάτος : 88 ηχητρο.

$$f_{LA} = 440 \text{ Hz} \rightarrow 49^{\circ} \text{ ηχητρο}$$

$$f_{NTO} = ? \rightarrow 40^{\circ} \text{ ηχητρο}$$

$$\frac{F_n}{F_k} = 2^{(n-k)/12}$$

$$\Rightarrow \frac{f_{NTO}}{f_{LA}} = 2^{(40-49)/12} \Rightarrow f_{NTO} = f_{LA} \cdot 2^{(40-49)/12} \Rightarrow$$

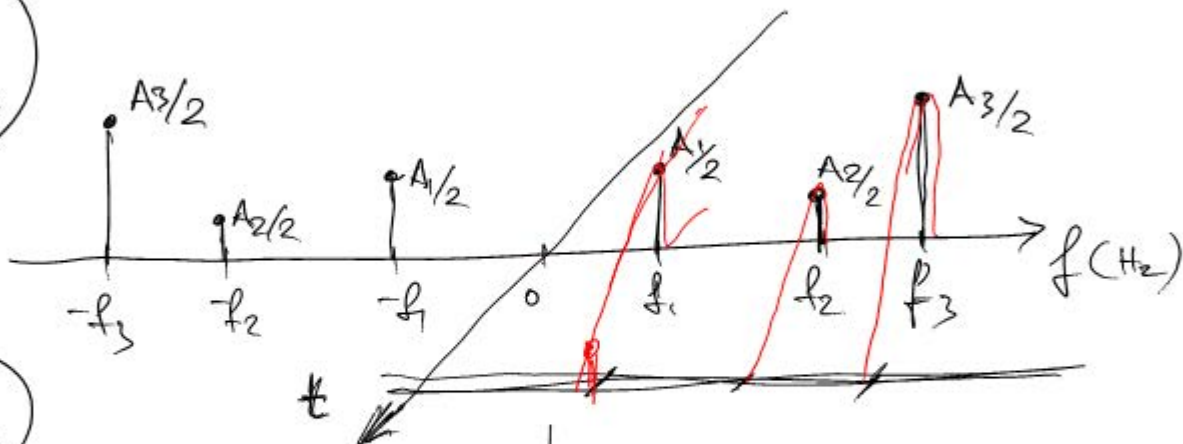
$$\Rightarrow \boxed{f_{NTO} \approx 262 \text{ Hz}}$$

Συμπόδι $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(2\pi f_3 t + \phi_3)$

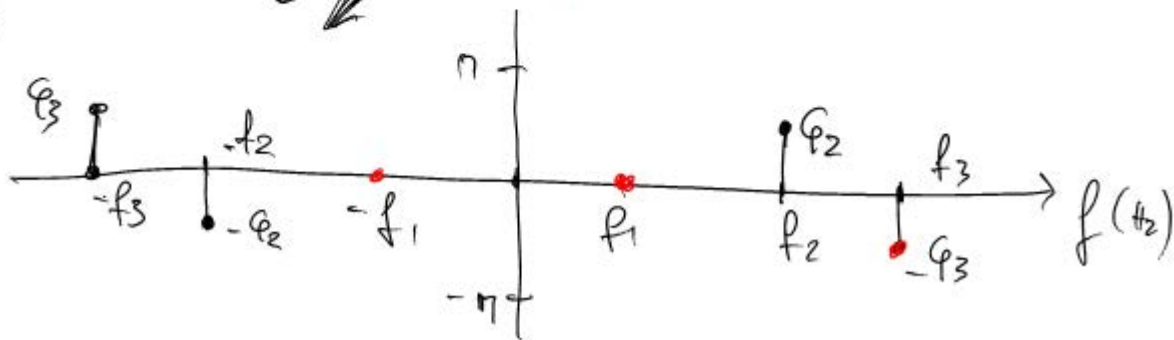
$$\cos(\theta(t)) = \frac{1}{2} e^{j\theta(t)} + \frac{1}{2} e^{-j\theta(t)}$$

$$f_3 > f_2 > f_1$$

Φάση
πλάτους



Φάση
φάσης



$$x(t) = A \cos(\theta(t)) \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\textcircled{1} \quad \theta(t) = \omega t + \varphi \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega}$$

$$\theta(t) = 2\pi f_0 t + \varphi \Rightarrow \frac{d\theta(t)}{dt} = 2\pi f_0$$

$$\theta(t) = 2\pi f_0 t^2 + 2\pi f_0 t + \varphi$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = 4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \quad \textcircled{2}$$

συγγραμιασ συρδρμζασ

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = 2f_0 t + f_0$$

"Chirp" \rightarrow σζαπυζασ

$$t=0 \quad f_1 = 200 \text{ Hz}$$

$$f_i(t) = \frac{f_2 - f_1}{T} t + f_1 \Rightarrow f_i(t) = 700t + 200$$

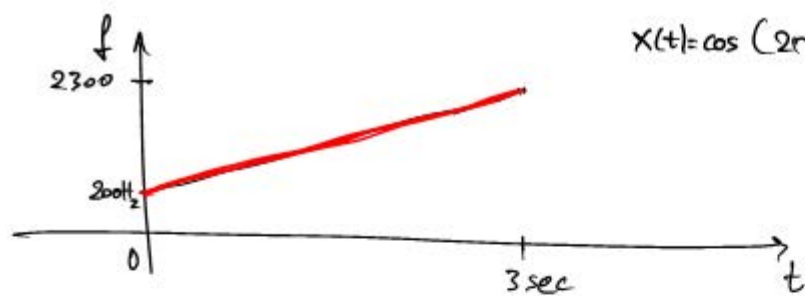
$$t=3 \text{ sec} \quad f_2 = 2300 \text{ Hz}$$

$$x(t) = \cos(\theta(t)) \quad f_i(t) \rightarrow \theta(t)$$

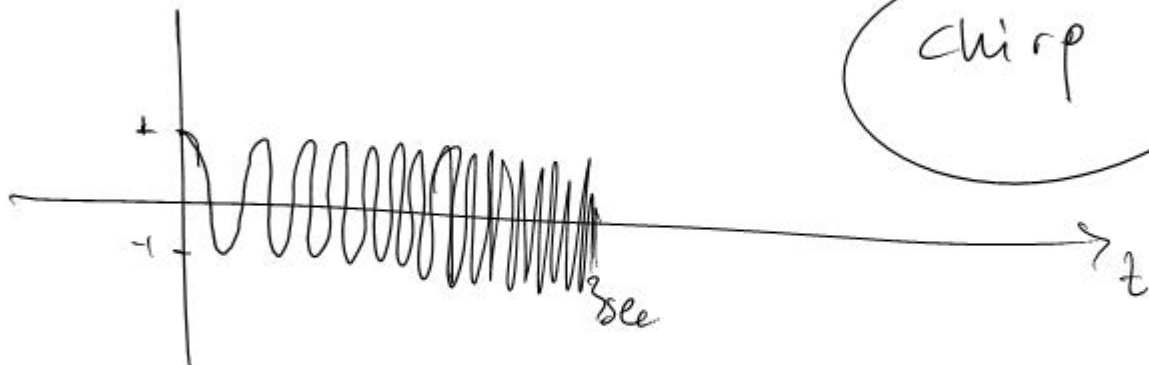
$$\theta(t) = \int_0^t 2\pi f_i(u) du + \varphi = \int_0^t 2\pi 700u du + \int_0^t 2\pi 200 du + \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = 2\pi 350 t^2 + 2\pi 200 t + \varphi} \quad \rightarrow x(t) = \cos(\theta(t))$$

$$x(t) = \cos(2\pi 350t^2 + 2\pi 200t + \phi_0)$$



Chirp



$$x_1(t) = 4 \cos(2\pi 20t)$$

$$\downarrow f_1 = 20 \text{ Hz} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \boxed{T_1 = \frac{1}{20} \text{ sec}} \end{array} \right.$$

$$\omega = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$x(t+T_0) = x(t)$$

$$\cos(t) \rightsquigarrow \cos(\omega t)$$

$$\omega = 1$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \hat{T} = 2\pi$$

$$x_2(t) = 4 \cdot \cos(2\pi 20t) + 2 \cos(2\pi 40t) + \cos(2\pi 50t)$$

$\downarrow f_1 = 20$ $\downarrow f_2 = 40$ $\downarrow f_3 = 50$

$$f_0 = \text{MKA} \{20, 40, 50\} = 10 \Rightarrow T_0 = \frac{1}{10} \text{ sec}$$

$$x_3(t) = 4 \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{20}}_{\omega = \frac{2\pi}{T}} t\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{40} t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{50} t\right)$$

α)

$$T_1 = 20$$

$$T_2 = 40$$

$$T_3 = 50$$

$$T_0 = \text{EK} \Pi \{20, 40, 50\} = 200 \checkmark$$

β)

$$T_{12} = \frac{T_1 \cdot T_2}{\text{MKA}(T_1, T_2)} = \frac{20 \cdot 40}{20} = 40$$

$$T_0 = T_{3, \{1,2\}} = \frac{50 \cdot T_{12}}{\text{MKA}(50, 40)} = \frac{40 \cdot 50}{10} = 200 \checkmark$$

$$x_s(t) = \cos(t) + \cos(5t) + \cos(13t)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi & T_2 = \frac{2\pi}{5} & T_3 = \frac{2\pi}{13} \end{array}$$

$$T_0 = \text{LCM} \left\{ 2\pi, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{13} \right\} = 2\pi$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2\pi & \frac{2\pi}{5} & \frac{2\pi}{13} & \frac{2\pi}{13} \\ 13 & \frac{13}{5} & 1 & \frac{13}{5} \\ 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} 2\pi & \frac{2\pi}{5} & \frac{2\pi}{13} & \frac{2\pi}{13} \\ 13 & \frac{13}{5} & 1 & \frac{13}{5} \\ 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}} \right\} \frac{2\pi}{13} \cdot \frac{13}{5} \cdot 5 = 2\pi$$

Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Διάλεξη 4η: Διαμόρφωση AM - Διακρότημα - Περιοδικότητα». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>