



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 6η: Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 215

Διάλεξη 6

Ανάπτυξη σε σειρά Fourier

$$x(t) = 10 + 5 \cos(2\pi 10t) = 10 + \frac{5}{2} e^{j2\pi 10t} + \frac{5}{2} e^{-j2\pi 10t}$$

μόνιμο
Ανταρ. σε σειρά Fourier

Ανταρ. σε σειρά Fourier

↓ Διότι
Ανταρ.

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} X_k e^{j\frac{2\pi k}{T_0} t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{0, -T_0/2}^{T_0, T_0/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T_0} t} dt$$

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$\int_0^{T_0} e^{j k \frac{2\pi}{T_0} t} dt = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ T_0 & k = 0 \end{cases}$$

$x(t), \varphi_k(t)$

Εσωτερικό
γινόμενο

$$\langle x(t), \varphi_k(t) \rangle_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \varphi_k^*(t) dt$$



$$b + e = a \Rightarrow e = a - b$$

$$b = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$$\langle e, x_k \rangle = 0 \quad \forall k \Rightarrow \text{ελάχιστο σάδος}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_k a_k \psi_k(t)$$

$\tilde{x}(t)$ η προσέγγιση του $x(t)$ στον χώρο που γεννιέται από τις συναρτήσεις βάσης $\{\psi_k(t)\}$

$$E(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

Για να είναι βέλτιστη η προσέγγιση:

$$\forall l \quad \langle E(t), \psi_l(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle (x(t) - \tilde{x}(t)), \psi_l(t) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x(t), \psi_l(t) \rangle = \langle \tilde{x}(t), \psi_l(t) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \sum_k a_k \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \langle x(t), \psi_l(t) \rangle$$

$$\langle \sum_k a_k \psi_k(t), \psi_e(t) \rangle = \langle x(t), \psi_e(t) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_k a_k \psi_k(t) \cdot \psi_e^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_e^*(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_k a_k \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \psi_k(t) \psi_e^*(t) dt}_{\lambda_{ek}} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_e^*(t) dt}_{\gamma_e}$$

$k=1 \dots M$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{e1} & \lambda_{e2} & \dots & \lambda_{eM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{ek1} & \lambda_{ek2} & \dots & \lambda_{ekM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{e1} \\ \vdots \\ \gamma_{ek} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

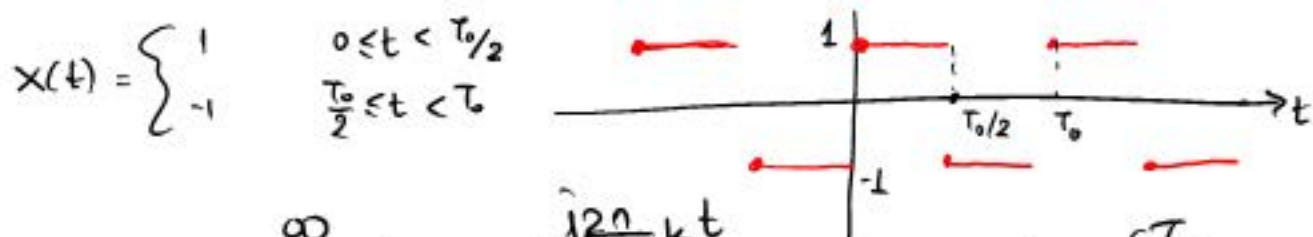
$\psi_k(t) = e^{j \frac{2\pi}{T_0} kt}$
 $\int_0^{T_0} \Rightarrow \lambda_{ek} = \begin{cases} 0 & l \neq k \\ T_0 & l = k \end{cases}$

Λ

$\cdot a = \gamma \Rightarrow$

$$a = \Lambda^{-1} \cdot \gamma$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt = X_k$$



$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} X_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \langle x(t), e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} \rangle_{(0, T_0)}$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} dt = 0$$

$$k \neq 0$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} (+1) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} (-1) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt =$$

$$= \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0/2} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt - \int_{T_0/2}^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt \right] = \frac{1}{T_0} \left\{ \frac{1}{-j\frac{2\pi}{T_0}k} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} \Big|_0^{T_0/2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{-j\frac{2\pi}{T_0}k} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} \Big|_{T_0/2}^{T_0} \right\} = \frac{1}{-j2\pi k} \left[\left(e^{-j\frac{2\pi}{T_0}k \frac{T_0}{2}} - e^{-j0} \right) - \left(e^{-j\frac{2\pi}{T_0}k T_0} - e^{j\frac{2\pi}{T_0}k \frac{T_0}{2}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k} \left[(e^{-j\pi k} - 1) - (e^{-j2\pi k} - e^{j\pi k}) \right] = \frac{1}{-j2\pi k} [-2 + 2e^{-j\pi k}]$$

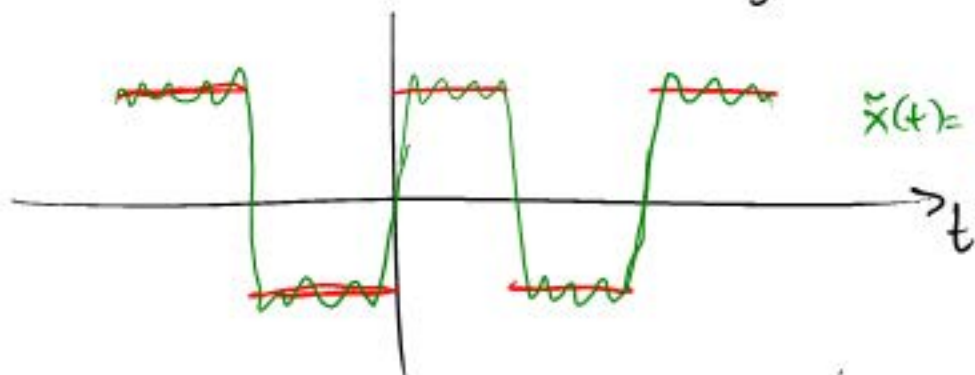
$$= \frac{1}{-j2\pi k} [-2 + 2e^{jn\pi k}] = \frac{1}{j\pi k} [1 - e^{-jn\pi k}] \Rightarrow$$

$$(e^{-jn})^k = (-1)^k$$



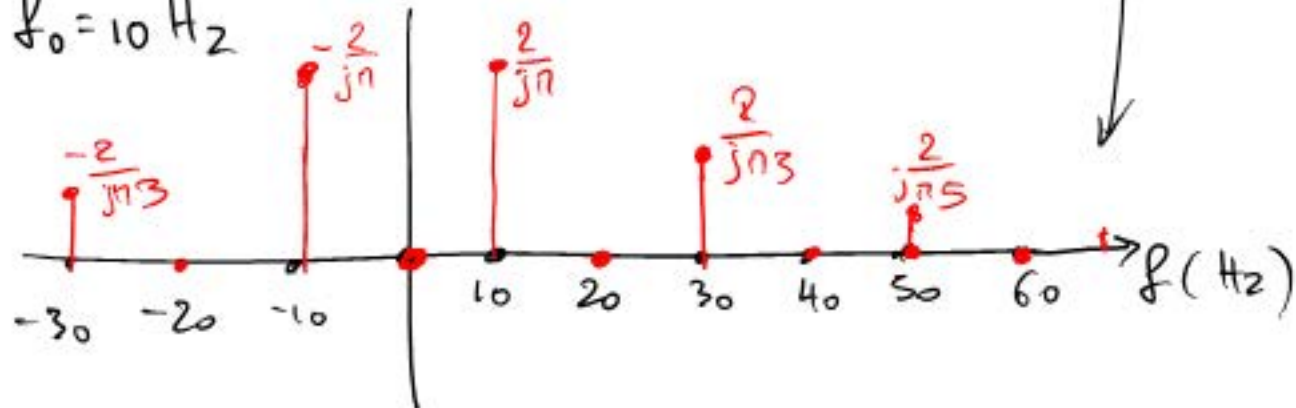
$$e^{-jn} = \cos(n) - j\sin(n)$$

$$\Rightarrow X_k = \frac{1}{j\pi k} (1 - (-1)^k) \Rightarrow X_k = \begin{cases} 0 & k \text{ άρτιος} \\ \frac{2}{j\pi k} & k \text{ περιττός} \end{cases}$$



$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-N}^N X_k e^{j\frac{2\pi k}{T_0} t}$$

$$f_0 = 10 \text{ Hz}$$

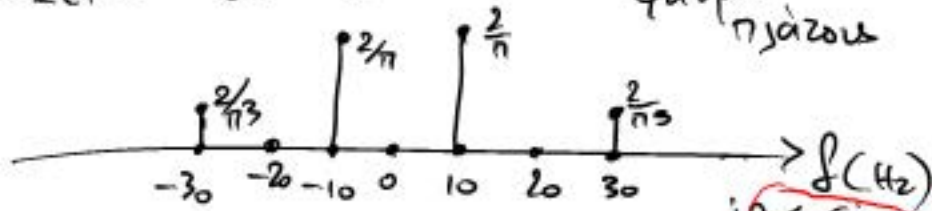


$$X_k = \frac{2}{j\pi k}$$

$$k = 2l+1 \quad l: -\infty, \dots, +\infty$$

Γάση ηζών

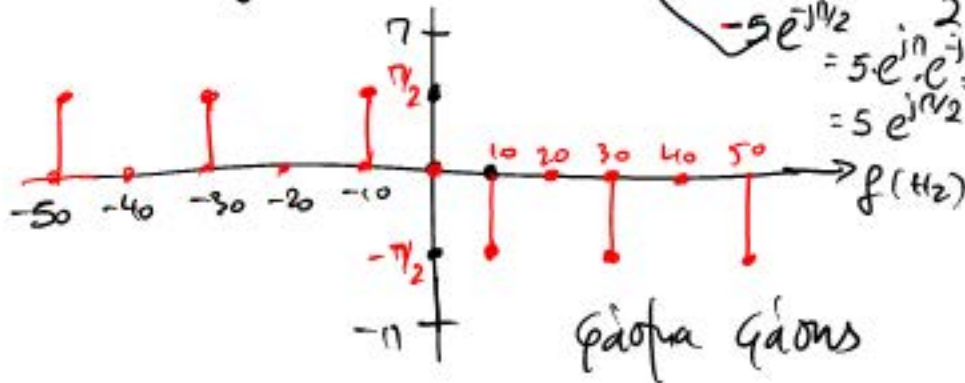
$$|X_k| = \frac{2}{\pi|k|}$$



$$\Delta X_k = -\frac{2}{\pi k} j = \frac{2}{\pi k} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & k > 0 \\ \frac{\pi}{2} & k < 0 \end{cases}$$

$|X|e^{j\theta} \leftarrow \text{Γάση}$

$$\begin{aligned} 5 &= 5e^{j0} \\ -5 &= 5 \cdot e^{jn} \rightarrow -1 \\ 5 \cdot e^{-j\pi/2} &\rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \\ -5e^{j\pi/2} &= 5e^{jn} \cdot e^{-j\pi/2} \\ &= 5e^{j\pi/2} \end{aligned}$$



Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Διάλεξη 6η: Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier».
Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>