ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 6η: Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 215

Διάλεξη 6

Ανάπτυγμα σε σειρά Fourier

$$x(t) = \underbrace{10 + 5\cos(2\pi 10 t)}_{\text{μονόπλευρο}} = \underbrace{10 + \frac{5}{2} e^{j 2\pi 10 t} + \frac{5}{2} e^{-j 2\pi 10 t}}_{\text{Δίπλευρο}}$$

Ανάπτ. σε σειρά Fourier

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} X_k e^{j \frac{2\pi k}{T_0} t}$$

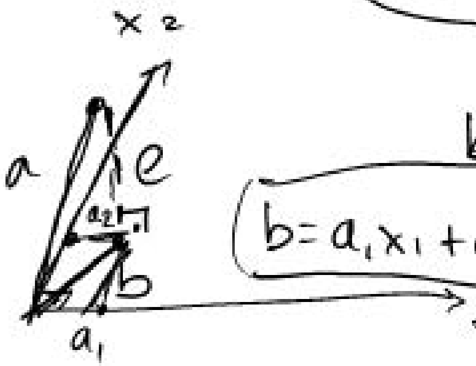
$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{0 \,,\, -T_0/2}^{T_0 \,,\, T_0/2} x(t) e^{-j \frac{2\pi k}{T_0} t} \, dt$$

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$\int_0^{T_0} e^{jk \frac{2\pi}{T_0} t} \, dt = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ T_0 & k = 0 \end{cases}$$

$x(t)$, $\varphi_k(t)$ Εσωτερικό γινόμενο

$$\boxed{\langle x(t), \varphi_k(t)\rangle_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot \varphi_k^{*}(t)\, dt}$$



$b+e=a \Rightarrow e = a-b$

$\boxed{b = a_1x_1 + a_2x_2}$ $\quad \langle e, x_k\rangle = 0 \quad \forall k \Rightarrow$ ελάχιστο λάθος

$$\tilde{x}(t) = \sum_k a_k \psi_k(t)$$

$\tilde{x}(t)$ η προσέγγιση του $x(t)$ στον χώρο που γεννιέται από τις συναρτήσεις βάσεις $\{\psi_k(t)\}$

$$\epsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

Για να είναι βέλτιστη η προβολή:

$$\forall l \quad \langle \epsilon(t), \psi_l(t)\rangle = 0 \Rightarrow \langle (x(t) - \tilde{x}(t)), \psi_l(t)\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x(t), \psi_l(t)\rangle = \langle \tilde{x}(t), \psi_l(t)\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \sum_k a_k \psi_k(t), \psi_l(t)\rangle = \langle x(t), \psi_l(t)\rangle$$

$$< \sum_k a_k \psi_k(t), \psi_\ell(t) > = < x(t), \psi_\ell(t) > \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_k a_k \psi_k(t) \cdot \psi_\ell^*(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_\ell^*(t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_k a_k \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \psi_k(t) \psi_\ell^*(t)\, dt}_{\lambda_{\ell k}} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_\ell^*(t)\, dt}_{\gamma_\ell}$$

$$\psi_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

$$\int_0^{T_0} \Rightarrow \lambda_{\ell k} = \begin{cases} 0 & \ell \neq k \\ T_0 & \ell = k \end{cases}$$

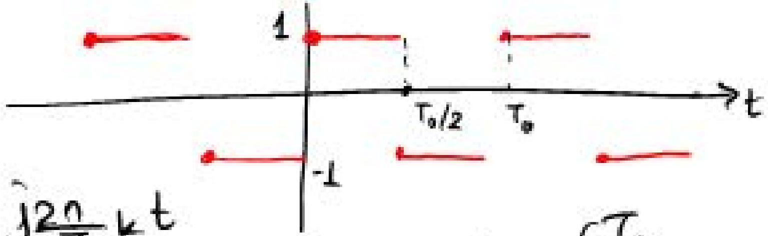
$k = 1 \dots M$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{\ell_1 1} & \lambda_{\ell_1 2} & \cdots & \lambda_{M} \\ \vdots & & T_0 & \\ \lambda_{\ell_k 1} & \lambda_{\ell_k 2} & \cdots & \lambda_{\lambda_k M} \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{\ell_1} \\ \vdots \\ \gamma_{\ell_k} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\Lambda \cdot a = \gamma \Rightarrow \boxed{a = \Lambda^{-1} \cdot \gamma}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt = X_k$$

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<T_0/2\\ -1 & \frac{T_0}{2}\le t<T_0\end{cases}$$



$$x(t)=X_0+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}X_k\,e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}\qquad X_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\,e^{-j\frac{2\pi k}{T_0}t}$$

$$=\frac{1}{T_0}\left\langle x(t),\ e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}\right\rangle_{(0,T_0)}$$

$$X_0=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2}dt-\frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0}dt=0$$

$k\neq 0$

$$X_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2}(+1)\,e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\,dt+\frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0}(-1)\,e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\,dt=$$

$$=\frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2}e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\,dt-\int_{T_0/2}^{T_0}e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\,dt\right]=\frac{1}{\cancel{T_0}}\left\{\frac{1}{-j\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}k}e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\Big|_0^{T_0/2}-\frac{1}{-j\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}k}e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\Big|_{T_0/2}^{T_0}\right\}$$

$$=\frac{1}{-j2\pi k}\left[\left(e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}k\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}}-e^{-j0}\right)-\left(e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}k\cancel{T_0}}-e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}k\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}}\right)\right]$$

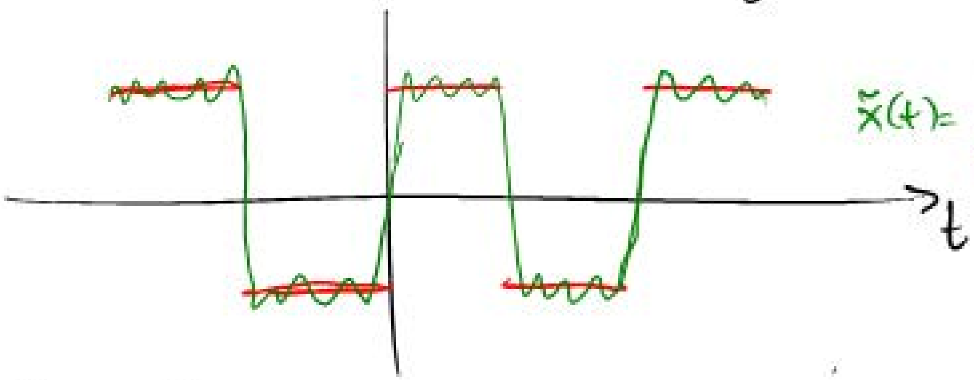
$$=\frac{1}{-j2\pi k}\left[\left(e^{-j\pi k}-1\right)-\left(\cancelto{1}{e^{-j2\pi k}}-e^{-j\pi k}\right)\right]=\frac{1}{-j2\pi k}\left[-2+2e^{-j\pi k}\right]$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k}\left[-2+2e^{-j\pi k}\right] = \frac{1}{j\pi k}\left[1-e^{-j\pi k}\right] \Rightarrow$$

$$\left(e^{-j\pi}\right)^k = (-1)^k$$

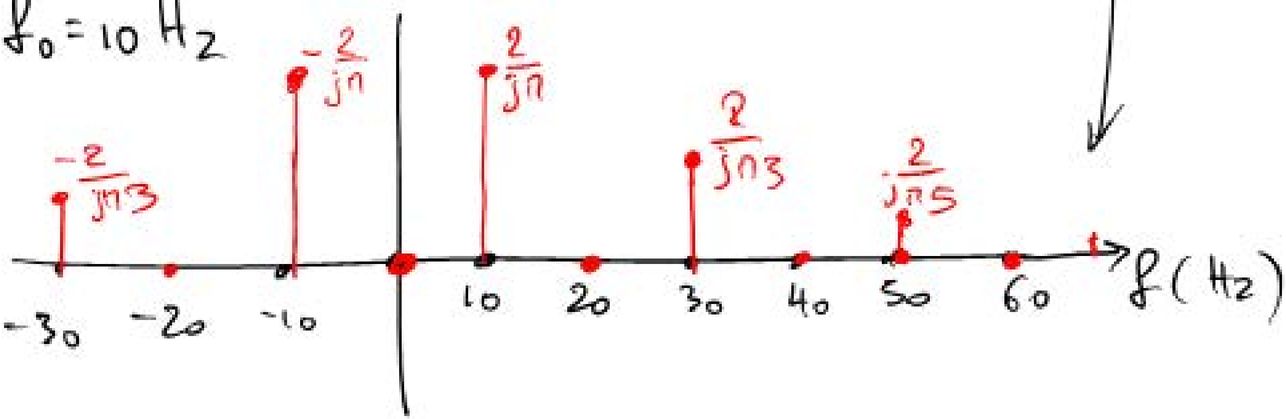
$$e^{-j\pi} = \cancel{\cos(\pi)}^{-1} - j\cancel{\sin(\pi)}^{0}$$

$$\Rightarrow X_k = \frac{1}{j\pi k}\left(1-(-1)^k\right) \Rightarrow X_k = \begin{cases} 0 & k \text{ άρτια} \\ \frac{2}{j\pi k} & k \text{ περιττά} \end{cases}$$



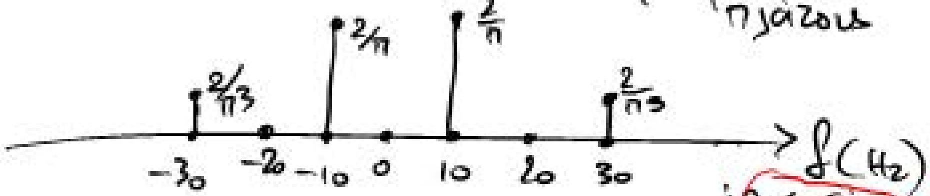
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

$f_0 = 10\,Hz$



$X_k = \frac{2}{j\pi k}$ $\quad k = 2l+1 \quad l: -\infty \dots +\infty$

φάσμα πλάτους



$|X_k| = \frac{2}{\pi|k|}$

$|X| e^{j\theta} \leftarrow$ φάση

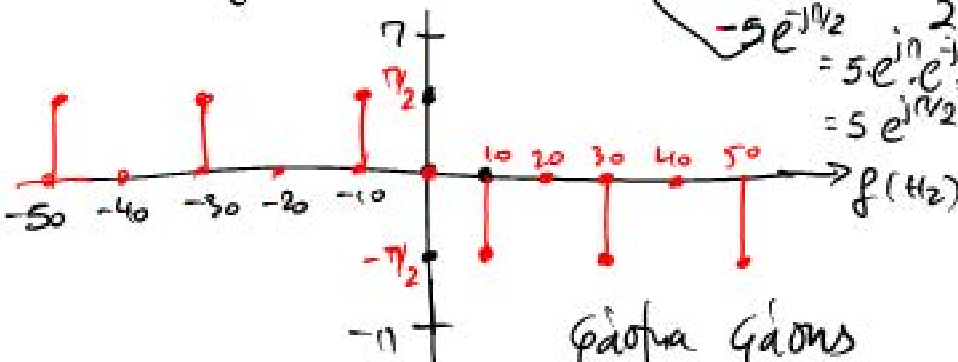
$5 = 5e^{j0}$

$-5 = 5\cdot e^{j\pi} \to -1$

$5\cdot e^{-j\pi/2} \to \theta = -\frac{\pi}{2}$

$-5e^{-j\pi/2} = 5e^{j\pi} e^{-j\pi/2} = 5e^{j\pi/2}$

$$\measuredangle X_k = -\frac{2}{\pi k} j = \frac{2}{\pi k} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & k>0 \\ \frac{\pi}{2} & k<0 \end{cases}$$



φάσμα φάσης

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

Σημείωμα Αναφοράς