ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Ενότητα: Μετασχηματισμός Fourier

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Μετασχηματισμός Fourier

Πραγματικά σήματα

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε πραγματικό σήμα $x(t)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα.1α. Θα συμβολίζουμε με $x(t, T_0)$ το σήμα που περικλείεται μεταξύ του διαστήματος $|t| < T_0/2$:

$$x(t, T_0) = x(t)\ rect(t/T_0)$$

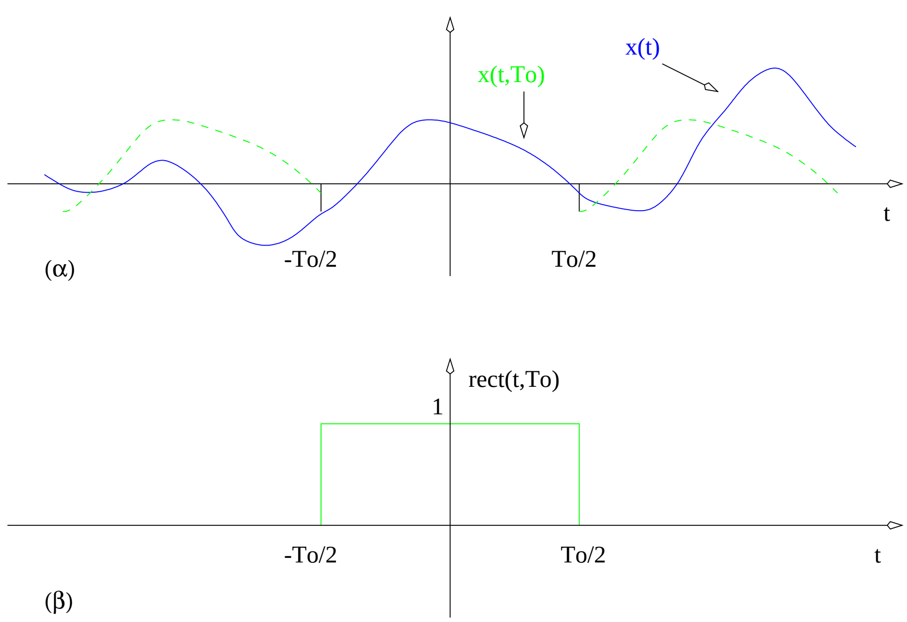
όπου το σήμα $rect(t/T_0)$ είναι ένας παλμός διάρκειας T_0 και πλάτους 1, όπως φαίνεται στο Σχήμα.1β. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει το σήμα $x(t, T_0)$ είναι περιορισμένης διάρκειας και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier:

$$x(t, T_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t} \tag{1}$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t, T_0) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \tag{2}$$

Το αποτέλεσμα από το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier θα είναι όπως ήδη έχουμε δεί ένα περιοδικό



Σχήμα 1: (α) Ενα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$, το σήμα $x(t, T_0)$ και το περιοδικό σήμα (πράσινη γραμμή) $x(t, kT_0)$ (β) παλμός πλάτους 1 και διάρκειας T_0.

σήμα το οποίο εκτός των ορίων του παλμού (παράθυρου) δεν θα έχει 'καμμία σχέση' (δηλ.

το σφάλμα προσέγγισης εκτός του παλμού θα είναι πολύ μεγάλο) με το αρχικό σήμα $x(t)$. Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.1α όπου το σήμα $x(t, T_0)$ αναπαράγεται σε πολλαπλάσια της διάρκειας, T_0, του παλμού. Το περιοδικό σήμα όπως υπολογίζεται από το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier φαίνεται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή.

Το ερώτημα είναι πως μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω διαδικασία σε όλο το σήμα $x(t)$.

Μπορούμε να πούμε ότι το αρχικό σήμα, $x(t)$, είναι ίσο με το $x(t, T_0)$ όταν $T_0 \to +\infty$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T_0 \to +\infty} x(t, T_0) \\ &= \lim_{T_0 \to +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t} \\ &= \lim_{T_0 \to +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t, T_0) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \right\} e^{jk2\pi f_0 t} \end{aligned} \tag{3}$$

- Οταν $T_0 \to +\infty$ τότε $f_0 = \dfrac{1}{T_0} \to df$ δηλαδή σε μία μικρή ποσότητα, τόσο μικρούλα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μικρή μετατόπιση μιας συνεχούς μεταβλητής f.

- Τώρα θα πρέπει να δούμε τι θα κάνουμε με το διπλό όριο:

$$\lim_{\substack{T_0 \to +\infty \\ k \to +\infty}} \left\{ k \, \frac{1}{T_0} \right\} \tag{4}$$

Αν θεωρήσουμε T_0 σταθερό ενώ το k παίρνει (ακέραιες) τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$ τότε το $k\,T_0$ θα έχει πάρει άπειρες τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$. Οταν το T_0 πάρει μία άλλη σταθερή τιμή τότε με τον ίδιο τρόπο (έχοντας k από $-\infty$ έως $+\infty$) θα πάρουμε ένα νέο σύνολο άπειρων τιμών από $-\infty$ έως $+\infty$ για το γινόμενο $k\,T_0$. Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για κάθε πραγματική θετική τιμή του T_0 τότε στο τέλος θα έχουμε όλες τις τιμές που μπορεί να λάβει ένας πραγματικός αριθμός από $-\infty$ έως $+\infty$. Δηλαδή θα έχουμε μια συνεχή μεταβλητή ή διαφορετικά ότι το όριο στην εξίσωση (4) θα τείνει στη συνεχή μεταβλητή f. Τότε όμως το άθροισμα του k από $-\infty$ έως $+\infty$ θα γίνει ολοκλήρωμα από $-\infty$ έως $+\infty$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση (3) γράφεται:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right\}}_{X(f)} e^{j2\pi f t} \tag{5}$$

δηλαδή

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \tag{6}$$

όπου

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{7}$$

Η εξίσωση (6) αναφέρεται σαν σύνθεση Fourier ή Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier ενώ η εξίσωση (7) αναφέρεται σαν ανάλυση Fourier ή απλά Μετασχηματισμός Fourier. Από την εξίσωση (6) προκύπτει ότι έχουμε μια ανάπτυξη του σήματος $x(t)$ σε άπειρες συχνότητες ή διαφορετικά σε άπειρες μιγαδικές ημιτονοειδές συνιστώσες με πλάτος $|X(f)|df$.

Για να δηλώσουμε ότι ένα σήμα $x(t)$ μετασχηματίζεται από το χώρο του χρόνου, t, στο χώρο της συχνότητας f, σε $X(f)$ μέσω του Μετασχηματισμού Fourier και αντίστροφα από τη συχνότητα στο χρόνο μέσω του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier γράφουμε:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \tag{8}$$

Επίσης ορισμένες φορές θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$F\{x(t)\}$$

για να δηλώσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(t)$.

Από την εξίσωση (6) προκύπτει επίσης ότι:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f) \tag{9}$$

δηλαδή η ανάκλαση του σήματος ως προς τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισοδυναμεί με ανάκλαση του φάσματος του σήματος.

Σημειώστε ότι σε πολλά βιβλία χρησιμοποιείτε η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ αντί της γραμμικής f. Τότε οι παραπάνω σχέσεις διαφοροποιούνται ως εξής:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{10}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{11}$$

Οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν εύκολα (το μπαλάκι σε εσάς :)) όταν αντικαταστήσουμε το f στις Εξ.(6) και (7) με $\omega/2\pi$[1]

[1]επειδή ορισμένοι θα το σκεφτούν ... το $X(f)$ και βέβαια γράφεται $X(\omega/2\pi)$ ΟΜΩΣ ως γνωστόννν το 2π είναι σταθερό νούμερο άρα η συνάρτησή μας γράφεται απλά $X(\omega)$ για να μας δείξει ότι εξαρτάται μόνο (ουσιαστικά) από το ω.

Ο Μετασχηματισμός Fourier (Εξ.(7)) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt \\ &= R(f) + jI(f) \end{aligned} \tag{12}$$

όπου είναι φανερό ότι ο Μετασχηματισμός Fourier είναι γενικά ένα μιγαδικό σήμα με το πραγματικό και το φανταστικό μέρος να υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt \tag{13}$$

$$I(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt \tag{14}$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι:

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(-2\pi f t)dt = R(f) \tag{15}$$

δηλαδή το σήμα (συχνότητας) $R(f)$ είναι άρτιο σήμα, και

$$I(-f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(-2\pi f t)dt = -I(f) \tag{16}$$

δηλαδή το σήμα (συχνότητας) $I(f)$ είναι περιττό σήμα.

Αφού γενικά ο Μετασχηματισμός Fourier είναι ένα μιγαδικό σήμα θα έχει πλάτος (φάσμα πλάτους)

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \tag{17}$$

και φάση (φάσμα φάσης)

$$\theta_x(f) = \arctan\frac{I(f)}{R(f)} \tag{18}$$

Αν το σήμα μετριέται σε $Volts$ (π.χ. είναι μεταβαλλόμενη τάση) τότε το $|X(f)|$ είναι σε $Volts/Hz$ και η $\theta_x(f)$ σε radians.

Γνωρίζοντας τώρα τις παραπάνω ιδιότητες του πραγματικού και φανταστικού μέρους του Μετασχηματισμού Fourier μπορούμε να δούμε μια πολύ χρήσιμη σχέση μεταξύ των αρνητικών και θετικών συχνοτήτων του φάσματος (υπενθύμιση: πάντα μιλάμε για πραγματικά σήματα). Από τις εξισώσεις (12), (15) και (16) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} X(-f) &= R(-f) + j\,I(-f) \\ &= R(f) - j\,I(f) \\ X(-f) &= X^*(f) \end{aligned} \tag{19}$$

Δηλαδή, για πραγματικά σήματα το φάσμα στις αρνητικές συχνότητες είναι ίσο με το συζυγές του φάσματος στις θετικές συχνότητες. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για πραγματικά σήματα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (7) από $-\infty$ έως $+\infty$. Αρκεί να υπολογιστεί το φάσμα μόνο για τις θετικές συχνότητες (από 0 έως $+\infty$) και μετά το φάσμα στις αρνητικές συχνότητες θα είναι ίσο με το συζυγές αυτού που υπολογίσαμε.

- Αν ένα σήμα είναι άρτιο:

  $$x(-t) = x(t) \quad \forall t$$

  τό φανταστικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

  θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος (το $\sin(2\pi f t)$ είναι περιττό σήμα ως πρός t (ή f)) οπότε θα μηδενίζεται. Δηλαδή $I(f) = 0$.

  Επομένως ο Μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού άρτιου σήματος είναι πραγματικό σήμα και ισούται με:

  $$\begin{aligned} X(f) &= R(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \\ &= 2 \int_{0}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \end{aligned}$$

- Αν ένα σήμα είναι περιττό:

  $$x(-t) = -x(t) \quad \forall t$$

  τό πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt$$

  θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος (το $\cos(2\pi f t)$ είναι άρτιο σήμα ως πρός t (ή f)) οπότε θα μηδενίζεται. Δηλαδή $R(f) = 0$.

  Επομένως ο Μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού περιττού σήματος είναι φανταστικό σήμα και ισούται με:

  $$\begin{aligned} X(f) &= j\ I(f) \\ &= -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt \\ &= -2j \int_{0}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier του σήματος:

$$x(t) = \frac{1}{t}$$

Το σήμα $x(t)$ είναι περιττό άρα ο Μετασχηματισμός Fourier του σήματος θα έχει μόνο μιγαδικό μέρος:

$$X(f) = I(f) = -2j \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi f t)}{t} dt$$

Ομως ισχύει (ωραίο μου τυπολόγιο!!!):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a\,x)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a < 0 \end{cases}$$

Από το παραπάνω, ο Μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ είναι:

$$X(f) = \begin{cases} -j\,\pi & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ j\,\pi & f < 0 \end{cases}$$

ή σε μια πιο compact μορφή:

$$X(f) = -j\pi sgn(f)$$

όπου το σήμα $sgn(\cdot)$ λέγεται σήμα προσήμου και φαίνεται στο Σχήμα.2. Το σήμα $sgn(t)$ περιγράφεται μαθηματικά ως:

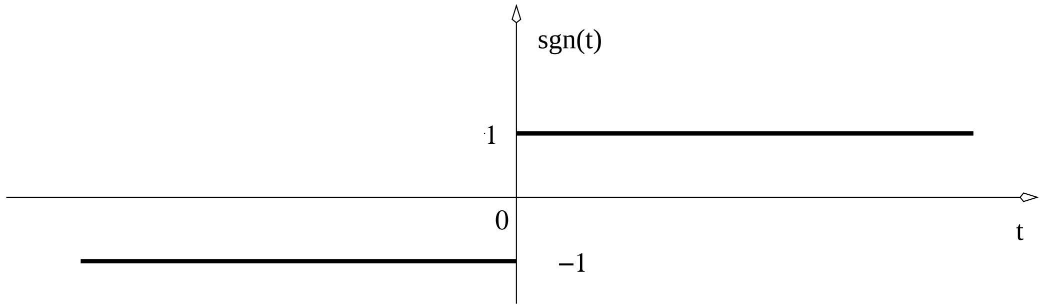
$$\begin{aligned} sgn(t) &= \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \\ &= \frac{t}{|t|} \ \text{για}\ t \neq 0 \end{aligned}$$

Η τιμή της συνάρτησης προσήμου για $t = 0$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή μεταξύ ± 1. Προς χάρη όμως της συμμετρίας, εμείς θα την θεωρούμε (εκτός και μας βολεύει διαφορετικά :)) ίση με το μηδέν. Δηλαδή

$$sgn(0) = 0$$

Γνωρίζουμε ότι ένα οποιοδήποτε πραγματικό σήμα μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός άρτιου, $x_\alpha(t)$, και ενός περιττού μέρους, $x_\pi(t)$:

$$x(t) = x_\alpha(t) + x_\pi(t) \tag{20}$$



Σχήμα 2: Το σήμα προσήμου.

όπου

$$\begin{aligned} x_{\alpha}(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} \\ x_{\pi}(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2} \end{aligned} \tag{21}$$

Από τις εξισώσεις (9), (12), (15), (16) και τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει ότι:

$$x_{\alpha}(t) \leftrightarrow R(f)$$
$$x_{\pi}(t) \leftrightarrow j\, I(f)$$

Δηλαδή το πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier σχετίζεται με το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος ενώ το φανταστικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier σχετίζεται με το περιττό μέρος του σήματος.

Μιγαδικά σήματα

Εστω το μιγαδικό σήμα:

$$x(t) = x_1(t) + j\, x_2(t)$$

Ο Μετασχηματισμός Fourier, $X(f)$, του σήματος ορίζεται όμοια όπως και στα πραγματικά σήματα:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{22}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση τη μιγαδική μορφή του $x(t)$ και αναπτύξουμε το $e^{-j2\pi f t}$ σε συνημίτονο και ημίτονο, ο Μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ γράφεται ως:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t) + j\, x_2(t))\, (\cos(2\pi f t) - j\, \sin(2\pi f t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)\, \cos(2\pi f t) + x_2(t) \sin(2\pi f t)]\, dt + \\ &\quad +j \int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t)\, \cos(2\pi f t) - x_1(t) \sin(2\pi f t)]\, dt \end{aligned} \tag{23}$$

Επομένως για ένα μιγαδικό σήμα το πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier δίνεται από την εξίσωση:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)\,\cos(2\pi ft) + x_2(t)\sin(2\pi ft)]\,dt$$

ενώ το φανταστικό μέρος από την εξίσωση:

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t)\,\cos(2\pi ft) - x_1(t)\sin(2\pi ft)]\,dt$$

Στα παρακάτω (για να μην πληκτρολογώ πολλά ενώ ταυτόχρονα έτσι πετυχαίνω να σας δυσκολεύω τη ζωή με συμβολισμούς - όπως κάθε δάσκαλος που σέβεται τον εαυτό του) θα χρησιμοποιήσουμε το ακρώνυμο Μ.Φ. για τον Μετασχηματισμό Fourier και το ακρώνυμο Α.Μ.Φ. για τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Fourier. Προσοχή όχι ΑΦΜ αλλά ΑΜΦ !!!

Ναι δεν το είπαμε αλλά δεν είναι και μυστικό: ο Μ.Φ. δεν ορίζεται για όλα τα σήματα. Μια ουσιαστική ικανή συνθήκη (όχι όμως και αναγκαία) για να υπάρχει ο Μ.Φ. ενός σήματος είναι το σήμα να είναι κατά απόλυτη τιμή ολοκληρώσιμο:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$$

Ολα τα σήματα που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι περιορισμένης διάρκειας και επομένως ικανοποιούν το παραπάνω κριτήριο. Παρόλα αυτά, όταν αναλύουμε κάποια σήματα στο χαρτί και μελετάμε κάποιο φαινόμενο, μπορούμε να χρησιμοποιούμε και σήματα που δεν πληρούν το παραπάνω κριτήριο. Για παράδειγμα, το πιο απλό σήμα αυτής της κατηγορίας που μπορούμε να φανταστούμε είναι μια σταθερά

$$x(t) = 5 \qquad \forall t$$

Ομως, όπως και οι μιγαδικοί αριθμοί έτσι και αυτά τα σήματα μπορεί να μην προκύπτουν στην πράξη αλλά μας βοηθούν στην ανάλυση και περιγραφή διαφόρων συστημάτων, σημάτων και φαινομένων. Ο Μ.Φ. αυτών των σημάτων δεν ορίζεται παρά όταν επεκτύνουμε τον Μ.Φ. σε μία κατηγορία συναρτήσεων που ονομάζονται κατανομές. Μια τέτοια επέκταση είναι πραγματικά εκτός ορίων του μαθήματος. Ετσι θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης όποτε χρειαστεί.

Ετσι, πριν προχωρήσουμε την ανάπτυξη του Μετασχηματισμού Fourier θα ήταν καλό να διαχωρήσουμε τα σήματα ανάλογα με το ενεργειακό τους περιεχόμενο.

Σήματα ενέργειας και ισχύος

Από το ηλεκτρισμό γνωρίζουμε ότι η ισχύ P (σε Watts) που καταναλώνεται σε μία αντίσταση R όταν στα άκρα της αντίστασης υπάρχει τάση U δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Αν η τάση U μεταβάλλεται με το χρόνο (είναι δηλ. ένα σήμα) τότε και η ισχύ θα μετβάλλεται σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R}$$

Η ενέργεια (σε Joules) που καταναλώνεται από τη χρονική στιγμή t_1 στη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} U^2(t)\,dt$$

Η μέση ισχύ που καταναλώνεται στο ίδιο διάστημα είναι:

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = \frac{1}{R}\,\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} U^2(t)\,dt$$

Αν θεωρήσουμε την αντίσταση να είναι 1Ω τότε τα παραπάνω μεταφέρονται στη θεωρία σήματος, ορίζοντας:

Ενέργεια ενός σήματος στο διάστημα $[t_1\ t_2]$

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

και Μέση Ισχύ στο ίδιο διάστημα:

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

Αν θεωρήσουμε το σήμα $x(t)$ να έχει άπειρη διάρκεια, και θεωρήσουμε $t_1 \to -\infty$ και $t_2 \to +\infty$, τότε μιλάμε για:

Ολική Ενέργεια του σήματος:

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

και Συνολική Μέση Ισχύ

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt$$

Η συνολική μέση ισχύ ορίζεται σαν μια πρωτεύουσα τιμή Cauchy[2] του ολοκληρώματος από $-\infty$ έως $+\infty$.

Για ένα περιοδικό σήμα η συνολική μέση ισχύ ισούται με την μέση ισχύ του σήματος σε μία περίοδο T_0:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x^2(t)dt$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι μιγαδικό τα παραπάνω ισχύουν αρκεί να κάνουμε την αλλαγή

$$x^2(t) \to |x(t)|^2$$

Ορισμός: Ονομάζουμε σήματα ενέργειας τα σήματα τα οποία έχουν περιορισμένη ενέργεια:

$$W_x < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

δηλαδή που η ενέργειά τους δεν είναι άπειρη. Τότε όμως η ισχύ αυτών των σημάτων θα είναι μηδέν (σύμφωνα με τον ορισμό της ισχύος).

Ορισμός: Ονομάζουμε σήματα ισχύος τα σήματα τα οποία έχουν περιορισμένη ισχύ:

$$0 < P_x = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Για να είναι περιορισμένο (φραγμένο) το παραπάνω όριο θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \to \infty$$

δηλαδή το σήμα να έχει άπειρη ενέργεια.

Επομένως:

Ενα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ ενώ ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια.

[2] Η πρωτεύουσα τιμή Cauchy ενός ολοκληρώματος από $-\infty$ έως $+\infty$ ορίζεται ως το όριο:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} x(t)dt$$

Μετασχηματισμός Fourier για σήματα ενέργειας

Για όλα τα σήματα ενέργειας, ο Μ.Φ. υπάρχει:

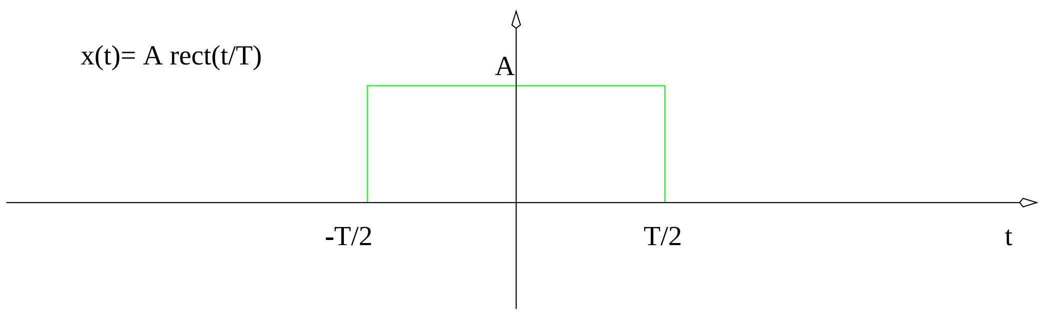
$$X(f) = F\{x(t)\} = |X(f)|\, e^{j\theta_x(f)}$$

όπου το $|X(f)|$ είναι το φάσμα πλάτους και $\theta_x(f)$ είναι το φάσμα φάσης. Αν το σήμα μετριέται σε Volts τότε το φάσμα πλάτους είναι σε Volts/Hz και το φάσμα φάσης σε radian.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος ενέργειας που φαίνεται στο Σχήμα.1:

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T})$$

Το σήμα $x(t)$ έχει διάρκεια T. Εξω από το διάστημα $[-T/2\ T/2]$ το σήμα είναι μηδενικό. Ο



Σχήμα 3: Το ορθογώνιο σήμα πλάτους Α και διάρκειας Τ: $x(t) = Arect(t/T)$

Μ.Φ. του σήματος μπορεί να υπολογιστεί από την Εξίσωση (7). Ομως καλό είναι να κάνουμε λίγο χρήση των ιδιοτήτων των σημάτων και των ολοκληρωμάτων. Μπορεί σε αυτό το παράδειγμα η λύση να είναι απλή με απευθείας υπολογισμό του Μ.Φ. όμως σε άλλα παραδείγματα η χρήση αυτών των ιδιοτήτων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το σήμα είναι άρτιο επομένως ο Μ.Φ. του σήματος θα έχει μόνο πραγματικό μέρος (Εξίσωση(13):

$$\begin{aligned} X(f) = R(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt \\ &= \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos(2\pi f t)dt \\ &= 2A\int_{0}^{+T/2} \cos(2\pi f t)dt \\ &= 2A\ \frac{1}{2\pi f}\sin(2\pi f t)|_0^{T/2} \\ &= \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f T) \\ &= AT\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \\ &= AT sinc(fT) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $sinc(x)$ ορίζεται ως:

$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{24}$$

όπου για $x = 0$ ορίζεται να είναι:

$$sinc(0) = 1$$

Από τα παραπάνω μπορούμε λοιπόν να γράψουμε, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που μάθαμε (μην πάνε χαμένοι), ότι:

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T}) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) = ATsinc(Tf)$$

Η συνάρτηση $X(f) = ATsinc(Tf)$ είναι άρτια και έχει μηδενισμούς όπου μηδενίζεται η συνάρτηση $\sin(\pi fT)$, δηλαδή στις συχνότητες, f:

$$\pi fT = \pm m\pi \Rightarrow f = \pm m\frac{1}{T}$$

όπου m είναι ακέραιος.

Επίσης θα είναι φθίνουσα καθώς θα αυξάνει κατά απόλυτη τιμή το f. Η συνάρτηση $X(f) = ATsinc(Tf)$ φαίνεται στο Σχήμα.5α

Φάσμα Πλάτους:

$$|X(f)| = AT|sinc(fT)|$$

Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα.5β

Φάσμα Φάσης:

$$\theta_x(f) = \arctan(\frac{I(f)}{R(f)})$$

Ομως το σήμα είναι άρτιο και επομένως

$$I(f) = 0 \ \ \forall f$$

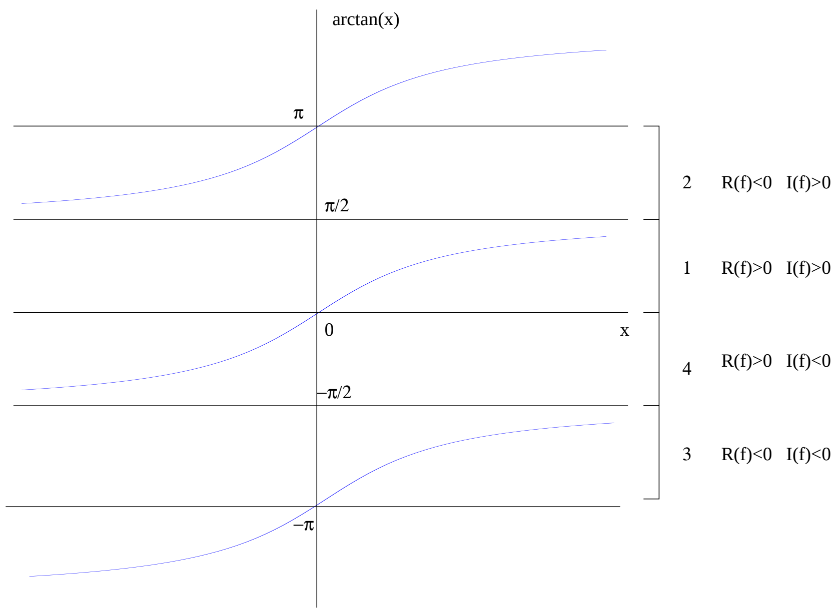
άρα

$$\theta_x(f) = \arctan(0) = k\pi$$

όπου κ ακέραιος. Για $k = 0$ η τιμή της φάσης λέγεται πρωτεύουσα τιμή ενώ για $|k| > |1|$ ονομάζονται δευτερεύουσες τιμές. Επειδή η φάση ορίζεται μεταξύ του $-\pi$ και π το k παίρνει τις τιμές:

-1, 0 και 1.

Οι πρωτεύουσες τιμές της φάσης (ορίζεται από $-\pi/2$ έως $\pi/2$) αφορούν το πρώτο και τέταρτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. Δηλαδή εκεί όπου το πραγματικό μέρος είναι θετικό. Επομένως όταν το πραγματικό μέρος είναι θετικό, η φάση θα ισούται με την πρωτεύουσα τιμή της συνάρτησης arctan. Οταν το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό τότε η φάση ΠΡΕΠΕΙ να υπολογιστεί απο τις δευτερεύουσες τιμές της συνάρτησης και όχι απο την πρωτεύουσα τιμή. Τα παραπάνω εξηγούνται σχηματικά στο Σχήμα.4 όπου το πεδίο τιμών της συνάρτησης arctan χωρίζεται σε τέσσερα μέρη (όσα και τα τερταρτημόρια στο μιγαδικό επίπεδο) ανάλογα με το πρόσημο του πραγματικού και φανταστικού μέρους. Στην άσκηση μας το φανταστικό μέρος είναι μηδέν



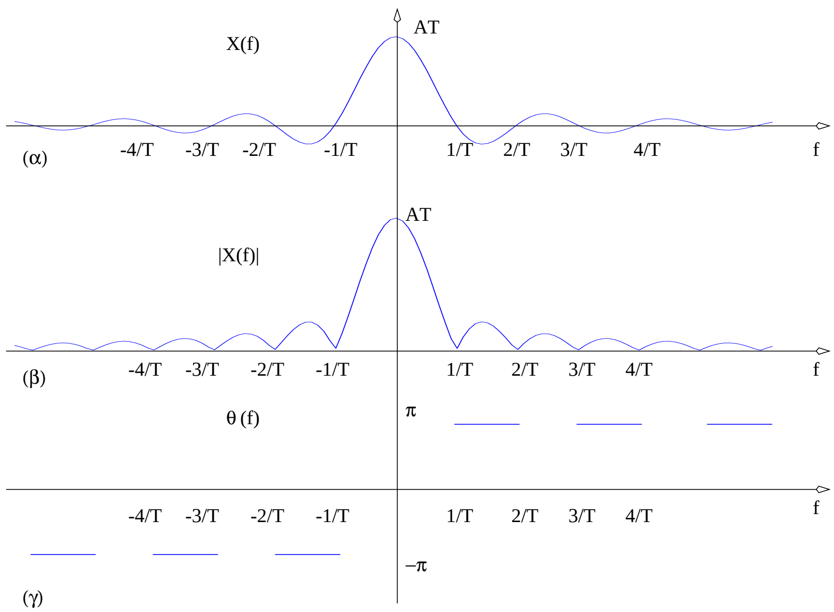
Σχήμα 4: Πρωτεύουσες και δευτερεύουσες τιμές της arctan.

(αναμενόμενο μιας και το σήμα μας είναι άρτιο). Τότε, σύμφωνα με αυτά που είπαμε, για τις συχνότητες εκείνες που το πραγματικό μέρος είναι θετικό η φάση θα είναι ίση με την πρωτεύουσα τιμή της $\arctan(0)$ δηλαδή μηδέν. Οταν το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό τότε έχουμε δύο επιλογές: $+\pi$, $-\pi$. Επειδή έχουμε συμφωνήσει να θεωρούμε θετικές συχνότητες αυτές που περιστρέφουν τη φάση κατά τη μαθηματική φορά (αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού) θα αντιστοιχήσουμε το $+\pi$ στις θετικές συχνότητες. Αντίστοιχα θα αντιστοιχήσουμε το $-\pi$ στις αρνητικές συχνότητες. Συνοπτικά (ουφφφ)

$$\left.\begin{array}{c} R(f) > 0 \\ I(f) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_x(f) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} R(f) < 0 \\ I(f) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_x(f) = \pm\pi \begin{cases} +\pi & f > 0 \\ -\pi & f < 0 \end{cases}$$

Το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα.5γ.



Σχήμα 5: (α) Ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου σήματος του Σχήματος3. (β) Το φάσμα πλάτους, $|X(f)|$. (γ) Το φάσμα φάσης $\theta_x(f)$

Ας θεωρήσουμε τώρα το ορθογώνιο σήμα στη συχνότητα (και όχι στο χρόνο όπως προηγουμένως):

$$X(f) = A\,rect(\frac{f}{T})$$

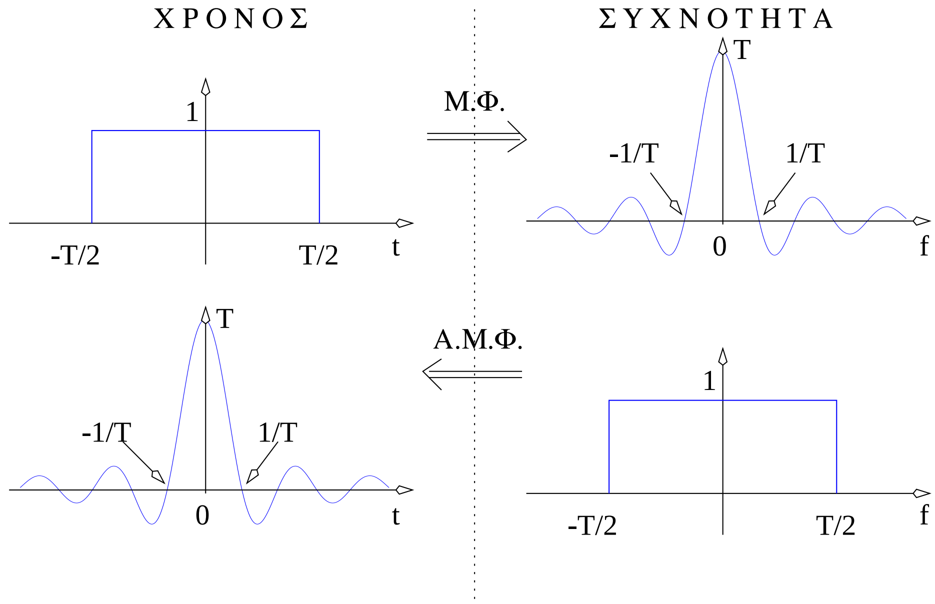
και ας υπολογίσουμε τον Α.Μ.Φ. του $X(f)$ (Εξίσωση 6):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cos(2\pi f t)df \\ &= 2A\int_{0}^{+T/2} \cos(2\pi f t)df \\ &= \frac{A}{\pi t}\sin(\pi t T) \\ &= AT sinc(tT) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχει μια συμμετρία (παραλήπουμε τα πλάτη για απλοποίηση):

$$\begin{aligned} rect(\frac{t}{T}) &\leftrightarrow T sinc(fT) \\ T sinc(tT) &\leftrightarrow rect(\frac{f}{T}) \end{aligned}$$

Η συμμετρία αυτή φαίνεται και στο Σχήμα.6



Σχήμα 6: Συμμετρία του μετασχηματισμού Fourier

Η συμμετρία αυτή δεν είναι τυχαία. Ισχύει για όλα τα σήματα και αποτελεί μια βασική ιδιότητα του Μ.Φ. Πράγματι:
Αν στον ορισμό του Α.Μ.Φ. (Εξίσωση 6) θέσουμε όπου t το $-t$ έχουμε:

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi ft}df$$

Αν στην παραπάνω σχέση ανταλλάξουμε μεταξύ τους τις μεταβλητές t και f, δηλαδή $t \leftrightarrow f$, τότε:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι αν $X(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ ΤΟΤΕ ο μετασχηματισμός Fourier του $X(t)$ θα είναι ίσος με $x(-f)$. Πράγματι, στην αρχή δείξαμε ότι:

$$x(t) = rect(\frac{t}{T}) \leftrightarrow X(f) = Tsinc(fT)$$

και λίγο παραπάνω ότι

$$X(t) = Tsinc(tT) \leftrightarrow x(-f) = rect(\frac{-f}{T}) = rect(\frac{f}{T})$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Εστω ότι ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ έχει Μ.Φ. $X(f)$:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

Τότε:

1. Συμμετρία:

   $$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

   Αυτή η ιδιότητα έχει δειχθεί παραπάνω και είναι πολύ σημαντική.

   Παράδειγμα:

   Αν $x(t) = rect(t/T)$ τότε (όπως έχουμε δείξει):

   $$X(f) = \frac{sin(\pi f T)}{\pi f}$$

   και χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα μπορούμε να πούμε (μετά βεβαιότητος) ότι ο Μ.Φ. του

   $$X(t) = \frac{sin(\pi t T)}{\pi t}$$

   είναι

   $$x(-f) = rect(-f/T) = rect(f/T)$$

2. $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$ και $x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$

   Απόδειξη:

   $$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \ \Rightarrow \\ X^*(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt \ \Rightarrow \\ X^*(-f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

   Αρα:

   $$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

   Ομοια μπορούμε να δείξουμε ότι:

   $$x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$$

Συνέπεια της ιδιότητας:

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό τότε $x(t) = x^*(t)$ και επομένως $X(f) = X^*(-f)$. Δηλαδή όταν το σήμα είναι πραγματικό το φασματικό περιεχόμενο του σήματος στις θετικές συχνότητες ισούται με το συζυγές φασματικό περιεχόμενο των αρνητικών συχνοτήτων. Το είχαμε πεί και παραπάνω αυτό σαν σχόλιο στην Εξίσωση (19).

3. $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$ για $a \neq 0$

   Απόδειξη:

   Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος $x(at)$:

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft}dt$$

   Θέτουμε $t' = at$.

   Για $a > 0$:

$$\begin{aligned} F\{x(at)\} &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi\frac{f}{a}t'}dt' \\ &= \frac{1}{a}X(\frac{f}{a}) \end{aligned}$$

   Για $a < 0$:

$$\begin{aligned} F\{x(at)\} &= \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} x(t')e^{-j2\pi\frac{f}{a}t'}dt' \\ &= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j2\pi\frac{f}{a}t'}dt' \\ &= -\frac{1}{a}X(\frac{f}{a}) \end{aligned}$$

   Επομένως για κάθε περίπτωση:

$$F\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$$

   Παράδειγμα: Ας πάρουμε για παράδειγμα το σήμα

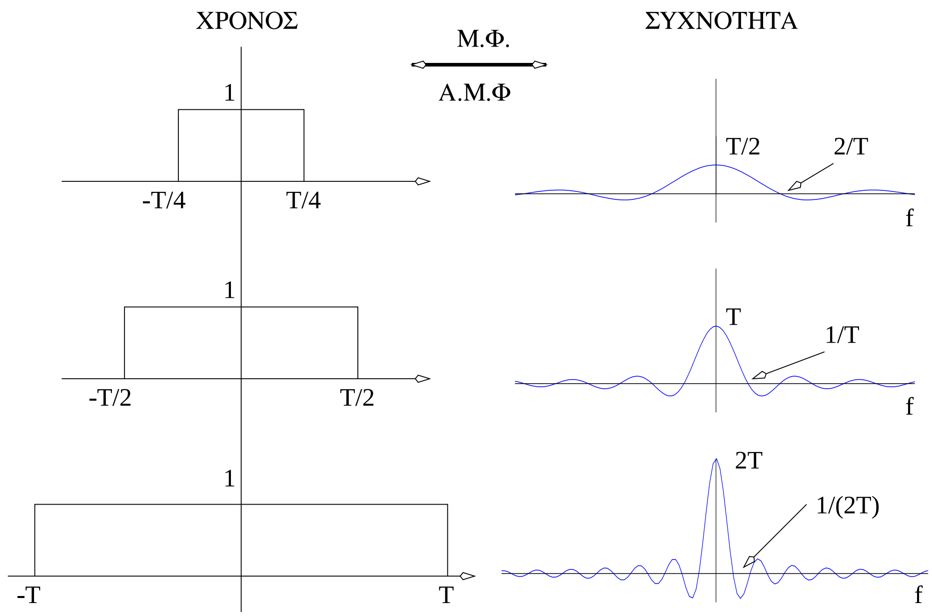
$$x(t) = rect(\frac{t}{T})$$

   το οποίο όπως έχουμε δεί έχει Μ.Φ.

$$X(f) = Tsinc(fT)$$

   Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα θα ισχύει

$$\begin{aligned} x(2t) &= rect(\frac{2t}{T}) &= rect(\frac{t}{T/2}) &\leftrightarrow \frac{1}{2}X(\frac{f}{2}) &= \frac{1}{2}Tsinc(\frac{fT}{2}) \\ x(\frac{t}{2}) &= rect(\frac{t/2}{T}) &= rect(\frac{t}{2T}) &\leftrightarrow 2X(2f) &= 2Tsinc(2fT) \end{aligned}$$



Σχήμα 7: Διαστολή στο χρόνο σημαίνει συστολή στη συχνότητα και αντιστρόφως.

Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα.7

Τι σημαίνουν όλα αυτά; Οταν ο άξονας του χρόνου διαστέλεται ($a > 1$) τότε ο άξονας των συχνοτήτων συστέλεται και αντίστροφα όταν $0 < a < 1$. Το παραπάνω διατυπώνεται πιο όμορφα ως εξής: Το σήμα και ο μετασχηματισμός αυτού κατά Fourier δεν μπορούν να είναι και τα δύο μικρής έκτασης.

Αλλο παράδειγμα:

Αν $a = -1$ τότε σύμφωνα με αυτήν την ιδιότητα:

$$F\{x(-t)\} = X(-f)$$

Δηλαδή: $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$

4. Αν επίσης $y(t) \leftrightarrow Y(f)$, τότε

$$C_1 x(t) \pm C_2 y(t) \leftrightarrow C_1 X(f) \pm C_2 Y(f)$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές.

5. $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
F\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\underbrace{t-t_0}_{t'})e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'}e^{-j2\pi ft_0}dt' \\
&= e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'}dt' \\
&= e^{-j2\pi ft_0}X(f)
\end{aligned}
$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι

$$F\{x(t+t_0)\} = e^{+j2\pi ft_0}X(f)$$

6. $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$

   Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του Α.Μ.Φ. (Εξίσωση (6)) θετώντας $t = 0$. Η παραπάνω σχέση λέει ότι το άθροισμα του φάσματος ισούται με την τιμή του σήματος στη χρονική στιγμή $t = 0$.

7. $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$

   Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του Μ.Φ. (Εξίσωση (7)) θετώντας $f = 0$. Η παραπάνω σχέση λέει ότι το άθροισμα του σήματος ισούται με την DC συνιστώσα του φάσματος.

8. $x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f \mp f_0)$

   Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
F\{x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f\pm f_0)t}dt \\
&= X(f \mp f_0)
\end{aligned}
$$

   και για οπτική απεικόνιση (για τους οπτικούς τύπους):

$$
\begin{aligned}
x(t)e^{+j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow X(f-f_0) \\
x(t)e^{-j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow X(f+f_0)
\end{aligned}
$$

9. Παράγωγος $\frac{d}{dt}\{x(t)\} \leftrightarrow j2\pi fX(f)$

   Απόδειξη:

$$\begin{aligned} F\{\frac{d\ x(t)}{dt}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\ x(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= x(t)e^{-j2\pi ft} \mid_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt}_{X(f)} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες παραγωντικής ολοκλήρωσης. Αν το $x(t)$ έχει Μ.Φ. αυτό σημαίνει ότι καθώς $t \to \pm\infty$, το σήμα θα φθίνει προς το μηδέν (αν θυμάστε έχουμε πεί ότι το σήμα $x(t)$ είναι σήμα περιορισμένης ενέργειας). Επομένως

$$x(t) \to 0 \quad \text{όταν} \;\; t \to \pm\infty$$

Δηλαδή

$$x(t)e^{-j2\pi ft} \mid_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

και άρα

$$F\{\frac{d\ x(t)}{dt}\} = j2\pi f X(f)$$

Γενικά ισχύει:

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

και λόγω της ιδιότητας της συμμετρίας του Μ.Φ.:

$$(-j2\pi t)^n x(t) \leftrightarrow X^{(n)}(f)$$

όπου $\{^{(n)}\}$ συμβολίζει τη n-οστή παράγωγο ενώ $\{^{n}\}$ συμβολίζει τη n-οστή δύναμη.

Παράδειγμα εφαρμογής ιδιοτήτων Μ.Φ.

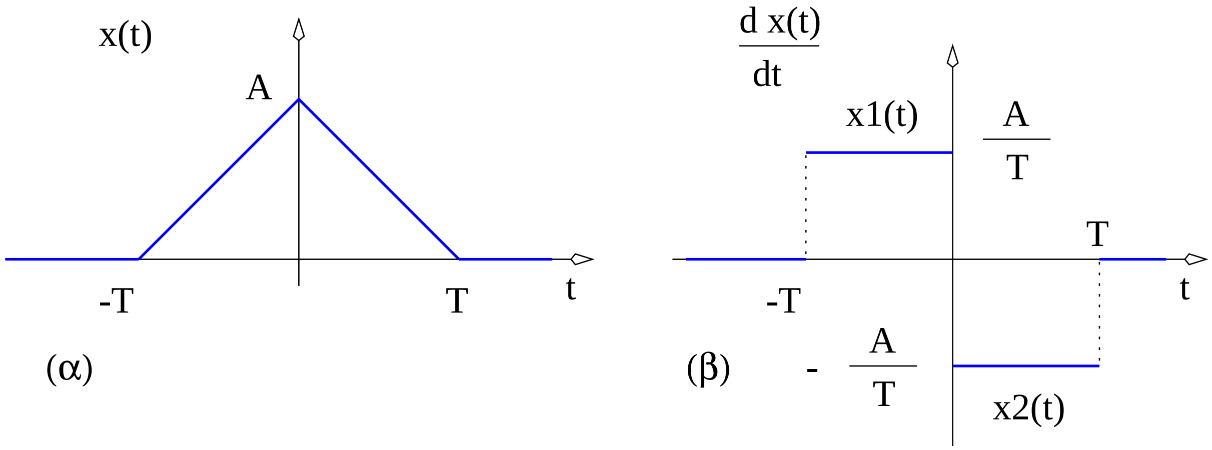
Να υπολογίσετε τον Μ.Φ. του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Το σήμα φαίνεται στο Σχήμα.8α ενώ η παράγωγος του σήματος (ως προς t) δίδεται στο Σχήμα.8β.

Σε αυτό το πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &\leftrightarrow (j2\pi f)X(f) \\ x(t \pm t_0) &\leftrightarrow X(f)e^{\pm j2\pi f t_0} \\ C_1 x(t) \pm C_2 y(t) &\leftrightarrow C_1 X(f) \pm C_2 Y(f) \end{aligned}$$



Σχήμα 8: (α). Τριγωνικό σήμα διάρκειας 2Τ και (β) Η παράγωγος του σήματος ως πρός t.

Οπως παρατηρούμε και από το Σχήμα 8β, η παράγωγος του σήματος αποτελείται από δύο σήματα ορθογώνια το ένα μετατοπισμένο αριστερά από την αρχή των αξόνων κατά $-T/2$ ($x_1(t)$) και το άλλο δεξιά από την αρχή των αξόνων κατά $T/2$ ($x_2(t)$).

Εδώ προτιμήσαμε να δουλέψουμε με την παράγωγο του σήματος $x^{(1)}(t)$ αντί με το σήμα $x(t)$. Αυτό γιατί ξέρουμε τον Μ.Φ. του ορθογώνιου σήματος (του σήματος παραθύρου) και επίσης ξέρουμε από τις ιδιότητες του Μ.Φ. τη σχέση παραγώγου και Μ.Φ.

$$F\{\frac{d\,x(t)}{dt}\} = j2\pi f X(f) = F\{x_1(t) + x_2(t)\} = F\{x_1(t)\} + F\{x_2(t)\} \tag{25}$$

όπου

$$x_1(t + T/2) = \frac{A}{T} rect(\frac{t-(-T/2)}{T}) = \frac{A}{T} rect(\frac{t+T/2}{T})$$

και

$$x_2(t - T/2) = -\frac{A}{T} rect(\frac{t-T/2}{T})$$

Επομένως

$$\begin{aligned} F\{x_1(t+T/2)\} &= \frac{A}{T} T\, sinc(fT) e^{+j2\pi fT/2} \\ F\{x_2(t-T/2)\} &= -\frac{A}{T} T\, sinc(fT) e^{-j2\pi fT/2} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στην Εξίσωση (25):

$$\begin{aligned} j2\pi f X(f) &= A sinc(fT)[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] \\ X(f) &= A sinc(fT) \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \\ X(f) &= A T\, sinc^2(fT) \end{aligned}$$

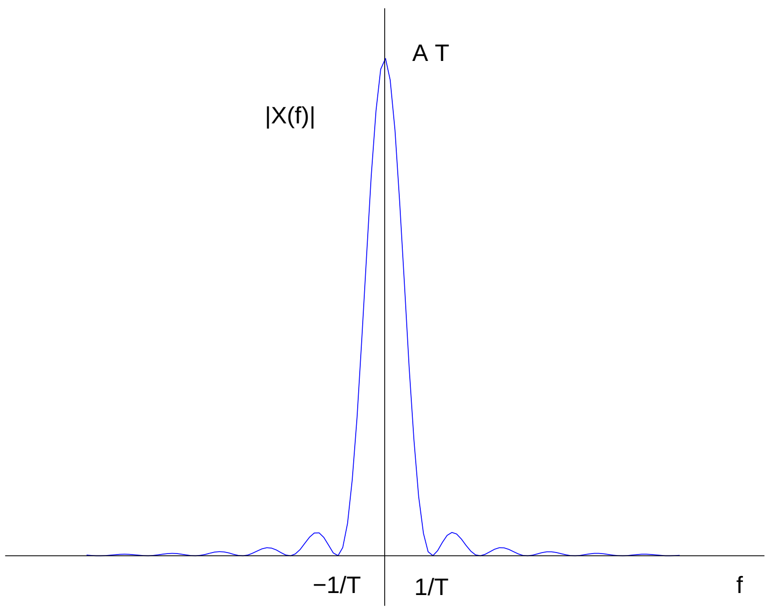
Παρατηρούμε ότι ο Μ.Φ. του τριγωνικού σήματος είναι πραγματικό σήμα και θετικό για όλες τις τιμές της f. Ετσι, το φάσμα φάσης θα είναι μηδέν $\forall f$

$$R(f) > 0 \;\; \text{και} \;\; I(f) = 0 \;\; \forall f \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \;\; \forall f$$

Το φάσμα πλάτους είναι

$$|X(f)| = A\,T\,sinc^2(fT)$$

και φαίνεται στο Σχήμα.9



Σχήμα 9: Φάσμα πλάτους ενός τριγωνικού σήματος διάρκειας 2T.

Πράξεις μεταξύ σημάτων και Μετασχηματισμός Fourier

Εχουμε ήδη δει ότι όταν $x(t) \leftrightarrow X(f)$ και $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ τότε

$$C_1 x(t) \pm C_2 y(t) \leftrightarrow C_1 X(f) \pm C_2 Y(f)$$

1. Πολλαπλασιασμός σημάτων.

   Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του γινομένου δύο σημάτων $x(t)$, $y(t)$:

$$F\{x(t)y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{26}$$

   Αν χρησιμοποιήσουμε τον Α.Μ.Φ. του $x(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du$$

   στην (26) τότε έχουμε [3]:

$$\begin{aligned} F\{x(t)y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du]\, y(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\, [\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t}dt]\, du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du \end{aligned}$$

   Το τελευταίο ολοκλήρωμα συνηθίζουμε να το συμβολίζουμε με

$$X(f) \star Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du$$

   και ονομάζεται ΣΥΝΕΛΙΞΗ (convolution) δύο σημάτων $X(f)$ και $Y(f)$. Η πράξη της συνέλιξης είναι πολύ σημαντική στη θεωρία σημάτων. Θα δούμε αυτή την έννοια αναλυτικά παρακάτω. Η μορφή της συνέλιξης όπως την είδαμε είναι στη συχνότητα. Ορίζεται όμως και στο χρόνο. Συνέλιξη δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ονομάζεται η συνάρτηση

$$x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du \tag{27}$$

[3] Εδώ θα έχουμε διπλό ολοκλήρωμα και θα χρειαστεί να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Για να μπορεί να συμβεί αυτό χρησιμοποιούμε το θεώρημα Fubini το οποίο λέει ότι η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να αλλάξει αν καθένα από αυτά τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα όταν στη θέση της $f(x,y)$ βάλουμε την $|f(x,y)|$. Μια τέτοια συνθήκη ισχύει για τα σήματα ενέργειας άρα μπορούμε εδώ να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης

Συνοπτικά έχουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα με πολλές χρήσεις:

$$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) \star Y(f) \tag{28}$$

Επειδή $x(t)y(t) = y(t)x(t)$ έχουμε επίσης ότι

$$X(f) \star Y(f) = Y(f) \star X(f)$$

Επομένως για την συνέλιξη ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

2. <u>Συνέλιξη σημάτων - Convolution.</u>

Προηγούμενα είδαμε ότι η συνέλιξη δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ορίζεται ως:

$$x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της συνέλιξης δύο σημάτων[4]

$$\begin{aligned} F\{x(t) \star y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \underbrace{[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-j2\pi ft}dt]}_{Y(f)e^{-j2\pi fu}} du \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi fu}du \\ &= Y(f)\,X(f) = X(f)\,Y(f) \end{aligned} \tag{29}$$

Στην παραπάνω απόδειξη κάναμε χρήση της ιδιότητας

$$y(t-t_0) \leftrightarrow Y(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} x(t) \star y(t) &\leftrightarrow X(f)Y(f) \\ y(t) \star x(t) &\leftrightarrow Y(f)X(f) \end{aligned} \tag{30}$$

Από τις δύο αυτές πράξεις που μόλις είδαμε προκύπτει ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα. ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ indeed:

Πολλαπλασιασμός στο Χρόνο σημαίνει Συνέλιξη στη Συχνότητα

ΚΑΙ

Συνέλιξη στο Χρόνο σημαίνει Πολλαπλασιασμός στη Συχνότητα.

[4] Και εδώ θα χρησιμοποιήσουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} x(t)\,y(t) &\leftrightarrow X(f)\star Y(f) \\ x(t)\star y(t) &\leftrightarrow X(f)\,Y(f) \end{aligned}$$

3. Αυτοσυχέτιση (autocorrelation)

Η αυτοσυσχέτιση σημάτων ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης ενός σήματος με τον εαυτό του, συμβολίζεται δε με $\phi_x(\tau)$ και υπολογίζεται ως:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \tag{31}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος[5]

$$\begin{aligned} F\{\phi_x(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt]\, e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, [\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau}_{X(f)e^{j2\pi ft}}]\, dt \\ &= X(f)\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j2\pi ft}dt \\ &= X(f)X^*(f) \quad \Rightarrow \\ F\{\phi_x(\tau)\} &= |X(f)|^2 \end{aligned}$$

Δηλαδή ο Μ.Φ. της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι πραγματική συνάρτηση (μιγαδικό μέρος μηδέν) και για όλες τις συχνότητες είναι θετική. Αρα η φάση του Μ.Φ. της αυτοσυχέτισης είναι μηδέν για όλες τις συχνότητες. Αυτό είναι επίσης σημαντικό: ο Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητος του φάσματος φάσης του σήματος. Εμείς γνωρίζουμε ότι μετατόπιση στο χρόνο σημαίνει φάση (φάση μετατόπισης). Επομένως, αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όπως και να μετακινηθεί το σήμα στον άξονα του χρόνου ο Μ.Φ. της αυτοσυχέτισης είναι ανεξάρτητος κάθε τέτοιας μετακίνησης. Μια τέτοια σημαντική συνάρτηση έχει βέβαια όνομα. Ονομάζεται Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας[6] (Energy Spectral Density) και συμβολίζεται ως:

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \tag{32}$$

που όπως δείξαμε ισούται με:

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 \tag{33}$$

[5]και εδώ αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης :)

[6]Ποιού νεκρού Ελληνα γλωσσολόγου θα τρίζουν τώρα τα κόκκαλα!!!!

Από την Εξίσωση (32) έχουμε επίσης ότι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \tag{34}$$

Αν στην Εξίσωση (34) θέσουμε $\tau = 0$ θα έχουμε το περίφημο θεώρημα του Parseval (τον είχατε ξεχασμένο ε;;!) για τον Μ.Φ. σημάτων ενέργειας:

$$\phi_x(0) = W_x = ||x||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \tag{35}$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$$

Αν το σήμα είναι σε $Volts$ η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της ενέργειας εκφράζεται σε $Volts^2 sec^2 = Volts^2\, sec/Hz$ και η αυτοσυσχέτιση σε $Volts^2\, sec$.

Από τα παραπάνω είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι

ο Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης μας υπολογίζει την Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

ΚΑΙ ότι

ο Α.Μ.Φ. της Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας μας υπολογίζει την αυτοσυσχέτιση

4. Ετεροσυσχέτιση cross-correlation

Η ετεροσυσχέτιση δύο σημάτων ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt \tag{36}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της ετεροσυσχέτισης δύο σημάτων

$$\begin{aligned} F\{\phi_{xy}(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt\,]\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X^*(f) Y(f) \end{aligned}$$

Δεν αναπτύξαμε αναλυτικά τα ολοκλήρωματα μιας και η διαδικασία είναι ανάλογη αυτής που ακολουθήσαμε παραπάνω για την αυτοσυσχέτιση.

Ο Μ.Φ. της ετεροσυσχέτισης δύο σημάτων ονομάζεται Συνάρτηση Διαφασματικής Πυκνότητα Ενέργειας[7] - Energy InterSpectral Density και ορίζεται ως

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} = X^*(f) Y(f)$$

[7]Εδώ πια θα σπάσανε τα κόκκαλα

Η $\Phi_{xy}(f)$ είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση και μη συμμετρική ως προς τη συχνότητα μηδέν.

Παρατηρείστε ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην ετεροσυσχέτιση

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{yx}(\tau)$$

Ο Μ.Φ. της $\phi_{yx}(\tau)$

$$\Phi_{yx}(f) = F\{\phi_{yx}(\tau)\} = Y^*(f)X(f)$$

Δηλαδή

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi^*_{yx}(f)$$

επειδή

$$(Y^*(f)X(f))^* = X^*(f)Y(f)$$

Επίσης

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{yx}(\tau)$$

αλλά μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi^*_{yx}(-\tau)$$

Αν τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ μετριούνται σε $Volts$ τότε οι μονάδες μέτρησης της ετεροσυσχέτισης και της Διαφασματικής Πυκνότητα Ενέργειας είναι αντίστοιχα: $Volts^2\,sec$ και $Volts^2 sec^2 = Volts^2\,sec/Hz$

5. Θεώρημα του γινομένου

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\phi_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}(f)df$$

Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f)df$$

και για πραγματικά σήματα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f)df$$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ: Τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι δύο απλοί αριθμοί (είτε είναι πραγματικά τα σήματα είτε είναι μιγαδικά). Δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε δύο σήματα στο χρόνο

$(x(t)y(t))$ και μετά ολοκληρώσουμε ως προς t θα λάβουμε έναν αριθμό (π.χ. 5). Τον ΙΔΙΟ αριθμό (π.χ. 5) θα λάβουμε όταν πολλαπλασιάσουμε αυτά τα σήματα στη συχνότητα $(X^*(f)Y(f))$ και ολοκληρώσουμε (ως προς f). Εχουμε λοιπόν ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ του γινομένου μεταξύ του χώρου του χρόνου και του χώρου της συχνότητας!! Αυτό δείχνει, με το δικό του τρόπο, την ισοδυναμία των δύο χώρων!!

6. Σχόλιο: Σχέση συσχέτισης και συνέλιξης.

   Είναι προφανές από τον ορισμό τους ότι η συσχέτιση και η συνέλιξη δεν είναι το ίδιο πράγμα. Ομως και από την άλλη μοιάζουν πολύ. Υπάρχει λοιπόν σχέση που να συνδέει αυτές τις δύο πράξεις; Υπάρχει!!

   Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης είναι:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

   Θέτουμε $t' = -t$, οπότε

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-t')y(-t+\tau)dt'$$

   Ας συγκρίνουμε τώρα με την συνέλιξη των δύο σημάτων

$$x(\tau) \star y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(-t+\tau)dt$$

   Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) \star y(\tau)$$

   Παρόμοια σχέση προκύπτει και για την αυτοσυσχέτιση

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) \star x(\tau)$$

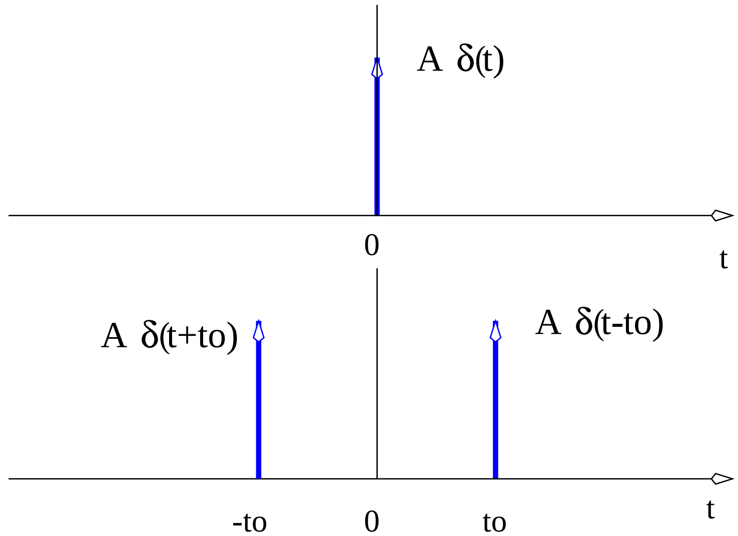
7. Πράξεις με τη συνάρτηση $\delta(t)$

   Η συνάρτηση $\delta(t)$ ονομάζεται επίσης κρουστικό σήμα Dirac ή και κατανομή δέλτα.

   Η κατανομή δέλτα συμβολίζεται ως ένα τόξο στην αρχή των αξόνων ($t = 0$) με πλάτος ανάλογο του σταθερού συντελεστή μπροστά από την $\delta(t)$. Π.χ. στο Σχήμα.10. Στο Σχήμα.10 φαίνονται επίσης οι μετακινημένες κατά t_0 δέλτα κατανομές.

   Η κατανομή δέλτα (με $A = 1$) έχει την παρακάτω ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \qquad (37)$$



Σχήμα 10: Η κατανομή $A\delta(t)$, $A\delta(t-t_0)$ και $A\delta(t+t_0)$.

αν η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι συνεχής στο $t=0$. Ομοια, αν το σήμα $x(t)$ είναι συνεχής στο $t=t_0$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \tag{38}$$

και αν το σήμα $x(t)$ είναι συνεχής στο $t=-t_0$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t+t_0)dt = x(-t_0) \tag{39}$$

Αν $x(t)=1$ τότε από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) = 1 \tag{40}$$

Επίσης αν $x(t)=e^{-j2\pi ft}$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{41}$$

Ομως η παραπάνω σχέση είναι ο Μ.Φ. της κατανομής $\delta(t)$ και χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (37) δείχουμε ότι

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = e^{-j2\pi f0} = 1 \tag{42}$$

και ο Α.Μ.Φ. είναι

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}df \tag{43}$$

Η Εξίσωση (43) αποτελεί έναν από τους ορισμούς της συνάρτησης δέλτα.

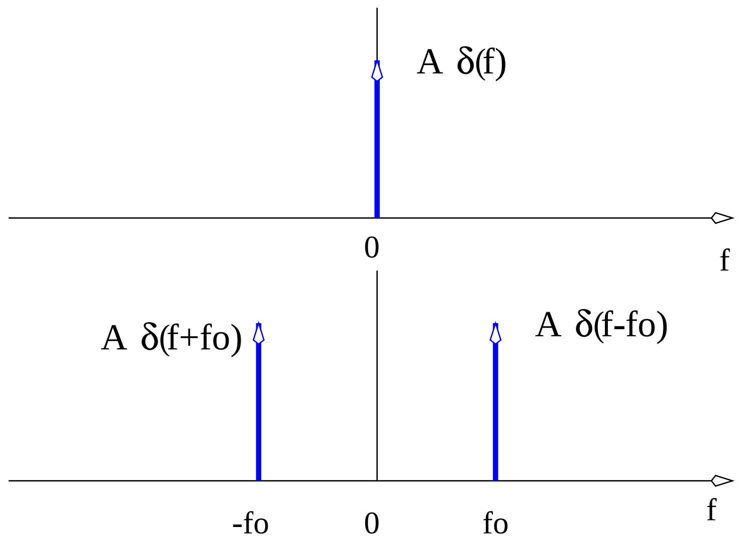
Επομένως ισχύει

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \tag{44}$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συμμετρίας

$$1 \leftrightarrow \delta(f) \tag{45}$$

Η κατανομή $\delta(f)$ καθώς και μετακινήσεις αυτές στον άξονα της συχνότητας φαίνονται στο Σχήμα.11. Εχουμε δείξει παραπάνω ότι



Σχήμα 11: Η κατανομή $A\delta(f)$, $A\delta(f-f_0)$ και $A\delta(f+f_0)$.

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Αν στην παραπάνω θεωρήσουμε ως σήμα την κατανομή δέλτα: $x(t) = \delta(t)$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow 1e^{-j2\pi f t_0} = e^{-j2\pi f t_0}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

$$\begin{array}{lcl} 1 & \leftrightarrow & \delta(f) \\ 5 & \leftrightarrow & 5\delta(f) \\ 5e^{-j2\pi f_0 t} & \leftrightarrow & 5\delta(f+f_0) \\ 2e^{j2\pi f_0 t} & \leftrightarrow & 2\delta(f-f_0) \\ 5\delta(t-t_0) & \leftrightarrow & 5e^{-j2\pi f t_0} \\ 2\delta(t+t_0) & \leftrightarrow & 2e^{j2\pi f t_0} \end{array}$$

Η κατανομή $\delta(t)$ είναι πολύ χρήσιμη στην περιγραφή των σημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και της συχνότητας. Επίσης οι παραπάνω ιδιότητες που είδαμε είναι χρήσιμες στον εύκολο υπολογισμό του Μ.Φ. και του Α.Μ.Φ. των σημάτων.

Για παράδειγμα το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 3 & t = -5 \\ 2 & t = 0 \\ -2 & t = 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

γράφεται συνοπτικά

$$x(t) = 3\delta(t+5) + 2\delta(t) - 2\delta(t-1)$$

και ο Μ.Φ. του σήματος

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= 3F\{\delta(t+5)\} + 2F\{\delta(t)\} - 2F\{\delta(t-1)\} \\ &= 3e^{j2\pi f5} + 2 - 2e^{-j2\pi f1} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα ισχύουν στη συχνότητα. Αν ένα φάσμα περιγράφεται από τη σχέση:

$$X(f) = \begin{cases} 5e^{j\phi_1} & f = 3Hz \\ 3e^{j\phi_2} & f = 4Hz \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

γράφεται συνοπτικά

$$X(f) = 5e^{j\phi_1}\delta(f-3) + 3e^{j\phi_2}\delta(f-4)$$

και ο Α.Μ.Φ.

$$F^{-1}\{X(f)\} = x(t) = 5e^{j\phi_1}e^{+j2\pi 3t} + 3e^{j\phi_2}e^{+j2\pi 4t}$$

Στο πεδίο του χρόνου ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} x(t) \star \delta(t) &= x(t) \\ x(t) \star \delta(t-t_0) &= x(t-t_0) \\ \delta(t-t_1) \star \delta(t-t_2) &= \delta(t-t_1-t_2) \end{aligned}$$

όπου $\star$ συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης που είδαμε παραπάνω.

Αντίστοιχα στο πεδίο της συχνότητας:

$$\begin{aligned} X(f) \star \delta(f) &= X(f) \\ X(f) \star \delta(f-f_0) &= X(f-f_0) \\ \delta(f-f_1) \star \delta(f-f_2) &= \delta(f-f_1-f_2) \end{aligned}$$

Παραγώγιση στον υπολογισμό του Μετασχηματισμού Fourier

Χρησιμοποιώντας την σημαντική ιδιότητα της παραγώγισης του Μετασχηματισμού Fourier

$$F\{x^n(t)\} = (j2\pi f)^n X(f)$$

όπου $(^n)$ σημαίνει n-οστή παράγωγος του σήματος, μπορούμε να απλοποιήσουμε αρκετά τις πράξεις κατά την προσπάθειά μας να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier ενός σήματος. Και βέβαια όλες οι ιδιότητες είναι χρήσιμες και μάλιστα τις χρησιμοποιούμε ευρύτατα. Ομως η ιδιότητα της παραγώγισης συνήθως παραμελείται γιατί δεν είναι συνήθες η παραγώγιση συναρτήσεων με ασυνέχειες όπου η εφαπτόμενη στα σημεία ασυνέχειας είναι μηδέν (όπως για το σήμα του παραθύρου μήκους T).

Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να πρέπει να δείξουμε ότι η παράγωγος της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης συμπεριφέρεται όπως η κατανομή $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{d\epsilon(t)}{dt}dt = x(0)$$

Σας θυμίζω ότι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση ορίζεται ως

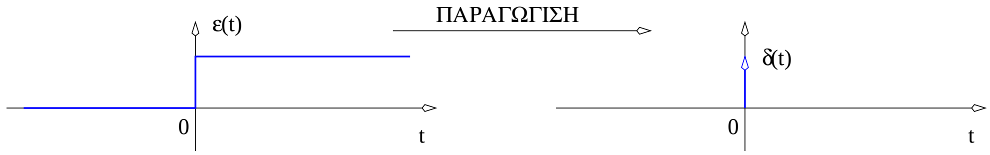
$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Για $t = 0$ η τιμή είναι τυχαία μεταξύ του 1 και 0. Ας δείξουμε τώρα το παραπάνω:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d\epsilon(t)}{dt}dt &= \epsilon(t)x(t)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(t)\frac{dx(t)}{dt}dt \\
&= \epsilon(+\infty)x(+\infty) - \underbrace{\epsilon(-\infty)}_{0}x(-\infty) - \textstyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx(t)}{dt}dt \\
&= x(+\infty) - x(t)]_0^{+\infty} \\
&= x(+\infty) - x(+\infty) + x(0) \\
&= x(0)
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = \delta(t)$$

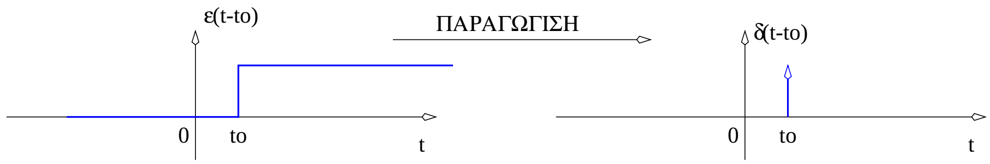


Σχήμα 1: Παράγωγος του σήματος μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης.

Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.1 Ομοια μπορούμε να δείξουμε και για τη συνάρτηση $\epsilon(t-t_0)$ ότι ισχύει

$$\frac{d\epsilon(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0)$$

Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.2.

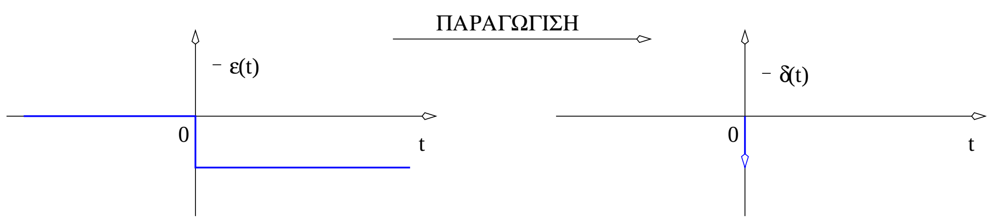


Σχήμα 2: Παράγωγος του σήματος μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης μετατοπισμένης κατά t_0.

Επίσης

$$\frac{d(-\epsilon(t))}{dt} = -\delta(t)$$

Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.3



Σχήμα 3: Παράγωγος του σήματος της αρνητικής μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης.

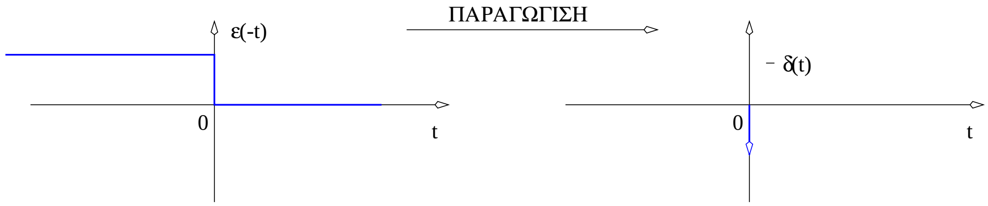
Ομοια με παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{d\epsilon(-t)}{dt} = -\delta(t)$$

Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.4

Ας δούμε παραδείγματα όπου θα χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω.

Παραδείγματα:



Σχήμα 4: Παράγωγος του $\epsilon(-t)$.

1. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος παραθύρου:

$$x(t) = Arect(\frac{t - \frac{a+b}{2}}{b-a})$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα.5(α).

Από προηγούμενα έχουμε δει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του παραθύρου χωρίς μετακίνηση από την αρχή των αξόνων είναι:

$$F\{x(t)\} = ATsinc(fT)$$

όπου $T = b - a$. Με μετακίνηση

$$\begin{aligned} F\{x(t - \frac{a+b}{2})\} &= ATsinc(fT)e^{-j2\pi f(a+b)/2} \\ &= ATsinc(fT)e^{-j\pi f(a+b)} \end{aligned}$$

Από το Σχήμα.5(β) βλέπουμε ότι μπορούμε να παραστήσουμε το σήμα παραθύρου ως άθροισμα δύο μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων

$$x(t) = A[\epsilon(t-a) - \epsilon(t-b)]$$

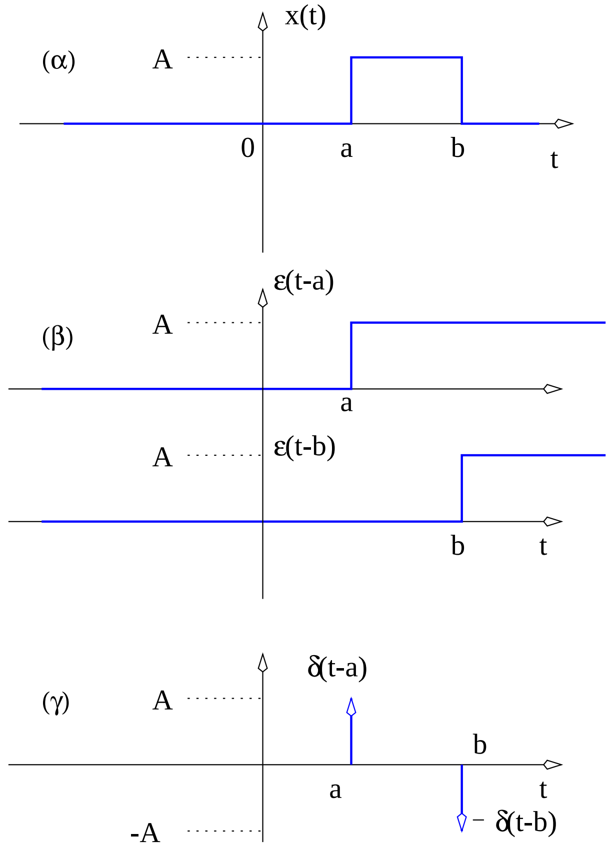
επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$\begin{aligned} x^{'}(t) &= A[\delta(t-a) - \delta(t-b)] \Rightarrow \\ F\{x^{'}(t)\} &= Ae^{-j2\pi fa} - Ae^{-j2\pi fb} \end{aligned}$$

Βγάζουμε από την παραπάνω εξίσωση κοινό παράγοντα $Ae^{-j\pi f(a+b)}$ και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} j2\pi fX(f) &= A[e^{j\pi f(b-a)} - e^{-j\pi f(b-a)}]e^{-j\pi f(a+b)} \\ X(f) &= A\frac{\sin(\pi f(b-a))}{\pi f}e^{-j\pi f(a+b)} \\ X(f) &= ATsinc(fT)e^{-j\pi f(a+b)} \end{aligned}$$

όπου $T = b - a$



Σχήμα 5: (α) Σήμα παραθύρου, (β) η αναπαράστασή του ως άθροισμα δύο μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων ($\epsilon(t-a) - \epsilon(t-b)$), και (γ) η παράγωγος του σήματος παραθύρου.

2. Το σήμα προσήμου

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

$$sgn(t) = 2\epsilon(t) - 1$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{d\,sgn(t)}{dt} &= 2\delta(t) \\ j2\pi f X(f) &= 2 \\ X(f) &= \frac{1}{j\pi f} \end{aligned}$$

3. Σήμα τριγώνου.

Στο Σχήμα.6 βλέπουμε ένα σήμα τριγώνου διάρκειας $2T$. Το σήμα έχει Μ.Φ.

$$F\{x(t)\} = A^2T^2 sinc^2(fT)$$

Θα δείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα με παραγώγους.

Στο ίδιο σχήμα φαίνονται η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος του σήματος. Το αρχικό σήμα στο διάστημα $-T \leq t \leq 0$ περιγράφεται από τη σχέση

$$x(t) = A^2T(1 + t/T)$$

Αρα η πρώτη παράγωγος στο ίδιο διάστημα είναι:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^2, \quad -T \leq t \leq 0$$

Στο διάστημα $0 \leq t \leq T$, το σήμα περιγράφεται από την εξίσωση

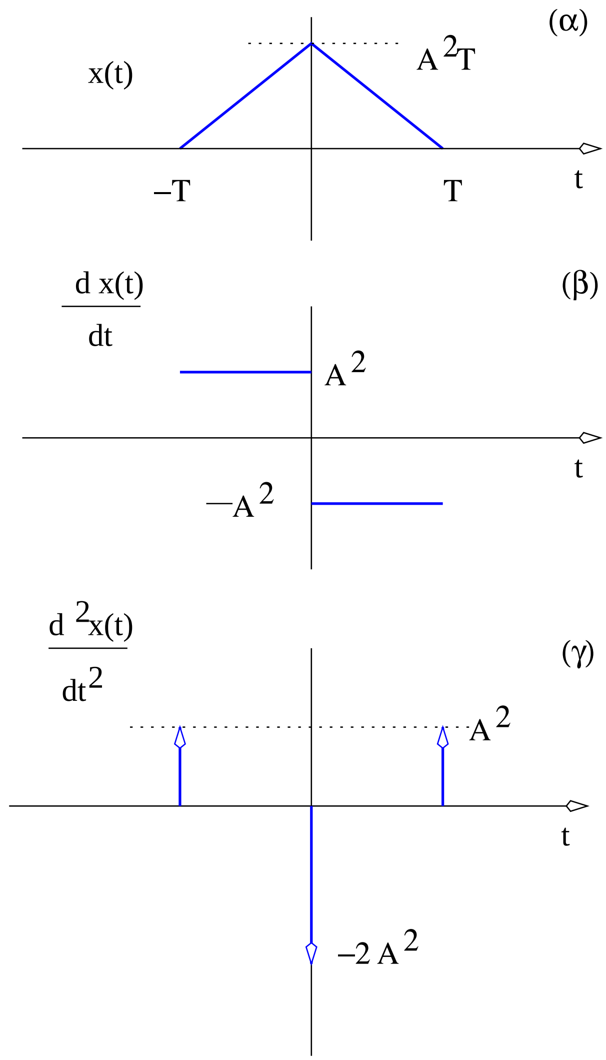
$$x(t) = A^2T(1 - t/T)$$

Επομένως

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A^2, \quad 0 \leq t \leq T$$

Χρησιμοποιώντας την μοναδιαία βηματική συνάρτηση, η πρώτη παράγωγος γράφεται ως

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A^2\epsilon(-t) - A^2\epsilon(-t - T) - A^2\epsilon(t) + A^2\epsilon(t - T)$$



Σχήμα 6: (α) Σήμα τριγώνου, (β) η πρώτη παράγωγος του σήματος και (γ) η δεύτερη παράγωγος του σήματος.

Αρα η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -A^2\delta(t) + A^2\delta(t+T) - A^2\delta(t) + A^2\delta(t-T) \\ &= A^2\delta(t+T) - 2A^2\delta(t) + A^2\delta(t-T)\end{aligned}$$

Στο Σχήμα.6(γ) είναι σχεδιασμένη η δεύτερη παράγωγος του σήματος. Επομένως ο Μ.Φ. του σήματος μπορεί να βρεθεί εύκολα από το Μ.Φ. της δεύτερης παραγώγου μιας και η δεύτερη παράγωγος του σήματος περιγράφεται απλά ως άθροισμα συναρτήσεων $\delta(t)$

$$\begin{aligned}F\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\} &= A^2e^{j2\pi fT} - 2A^2 + A^2e^{-j2\pi fT} \\ (j2\pi f)^2X(f) &= 2A^2\cos(2\pi fT) - 2A^2 \\ -4\pi^2f^2X(f) &= 2A^2 - 4A^2\sin^2(\pi fT) - 2A^2 \\ X(f) &= A^2(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f})^2 \\ &= A^2T^2sinc^2(fT)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα:

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης