



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Ενότητα: Δειγματοληψία

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Δειγματοληψία

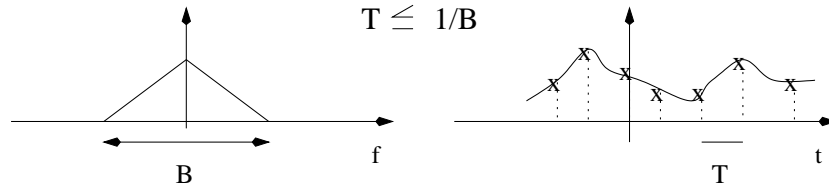
Όλα τα σήματα που έχουμε αναλύσει μέχρι τώρα είναι αναλογικά. Δηλαδή ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή t . Τα σήματα αυτά τα συμβολίζουμε π.χ. $x(t)$ για το σήμα το οποίο συμβολίζεται με το σύμβολο x και που ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή t (το t μέσα σε παρένθεση). Αυτός είναι η διεθνής τρόπος συμβολισμού των αναλογικών σημάτων. Με την αυξανόμενη χρήση υπολογιστών στη δεκαετία του '60 φάνηκε ότι σύντομα οι υπολογιστές θα ήταν πολύτιμοι βοηθοί στην ανάλυση πολλών ειδών σημάτων: από τις τηλεπικοινωνίες μέχρι την ιατρική, την πρόγνωση του καιρού, των σεισμών των οικονομικών δεδομένων κ.λ.π. Το πρόβλημα όμως είναι ότι ο υπολογιστής δεν μπορεί να χειριστεί αναλογικά σήματα. Έτσι το πρόβλημα της δειγματοληψίας αναλογικών σημάτων άρχισε από πολύ νωρίς (σχετικά) να απασχολεί τους επιστήμονες. Συγκεκριμένα ήταν το 1945 στα εργαστήρια των Bell Labs όταν ο Nyquist και ο Shannon διατύπωσαν το θεώρημα της δειγματοληψίας. Το θεώρημα αυτό απαντάει στην ερώτηση: Μπορούμε να αναπαράγουμε ένα σήμα εξ'ολοκλήρου μόνο αν έχουμε κάποια δείγματα αυτού;!!!!!! Αν ναι, κάτω από ποιές συνθήκες; Η απάντηση είναι καταφατική και δώθηκε από τους παραπάνω ερευνητές το 1945. Οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται είναι οι ακόλουθες:

1. Θα πρέπει το σήμα να είναι περιορισμένου φάσματος συχνοτήτων. Δηλαδή όλο το φασματικό του περιεχόμενο να βρίσκεται μεταξύ κάποιων πεπερασμένων συχνοτήτων. Αν π.χ. το φάσμα συχνοτήτων του σήματος είναι μεταξύ των συχνοτήτων $-f_{max}$ και f_{max} , όπου f_{max} είναι η μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στο σήμα (και $-f_{max}$ η ελάχιστη) τότε το εύρος φάσματος συχνοτήτων του σήματος είναι $B = 2f_{max}$.
2. Αν ισχύει η πρώτη συνθήκη τότε θα μπορούμε από τα δείγματα του σήματος να επιστρέψουμε πίσω την αναλογική μορφή του σήματος ΑΡΚΕΙ τα δείγματα αυτά να έχουν απόσταση μεταξύ τους όχι μεγαλύτερη από

$$T = \frac{1}{B}$$

Επομένως, αν έχουμε ένα συνεχές σήμα το οποίο έχει περιορισμένο εύρος φάσματος συχνοτήτων π.χ. B η δειγματοληψία του σήματος αυτού με ρυθμό μικρότερο ή ίσο του $1/B$ θα μας δώσει δείγματα τα οποία ορίζουν ΠΛΗΡΩΣ το σήμα. Οι συνθήκες 1 και 2 φαίνονται¹ στο Σχήμα. 1 Στα

¹για τους οπτικούς τύπους. Όλα τα σχήματα σε αυτό το κεφάλαιο είναι μια ευγενική χορηγία του Υπουργείου Επικοινωνιών - για να μην πείτε ότι όλα τα έργα γίνονται μόνο προεκλογικά



Σχήμα 1: Σχέση εύρους φάσματος και ρυθμού δειγματοληψίας.

παρακάτω θα ασχοληθούμε με τη μαθηματική έκφραση της δειγματοληψίας και τις εφαρμογές της.

Εστω το αναλογικό σήμα $x(t)$ και η σειρά παλμών Dirac

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

Η απόσταση μεταξύ των παλμών Dirac είναι T_s . Η ιδανική δειγματοληψία εκφράζεται με το γινόμενο των δύο αυτών σημάτων:

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

Ο παραπάνω πολλαπλασιασμός θα μας προμηθεύσει με δείγματα του αναλογικού σήματος που θα απέχουν απόσταση T_s δευτερόλεπτα. Για να αντιληφθούμε καλύτερα τις συνέπειες της δειγματοληψίας θα πρέπει να δούμε τα αποτελέσματα αυτής στο χώρο της συχνότητας. Όπως βλέπουμε από την παραπάνω εξίσωση η δειγματοληψία γίνεται με πολλαπλασιασμό δύο σημάτων στο χώρο του χρόνου. Επομένως στο χώρο της συχνότητας θα πρέπει να συμβαίνει συνέλιξη των αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier των σημάτων. Αν θεωρήσουμε ότι

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

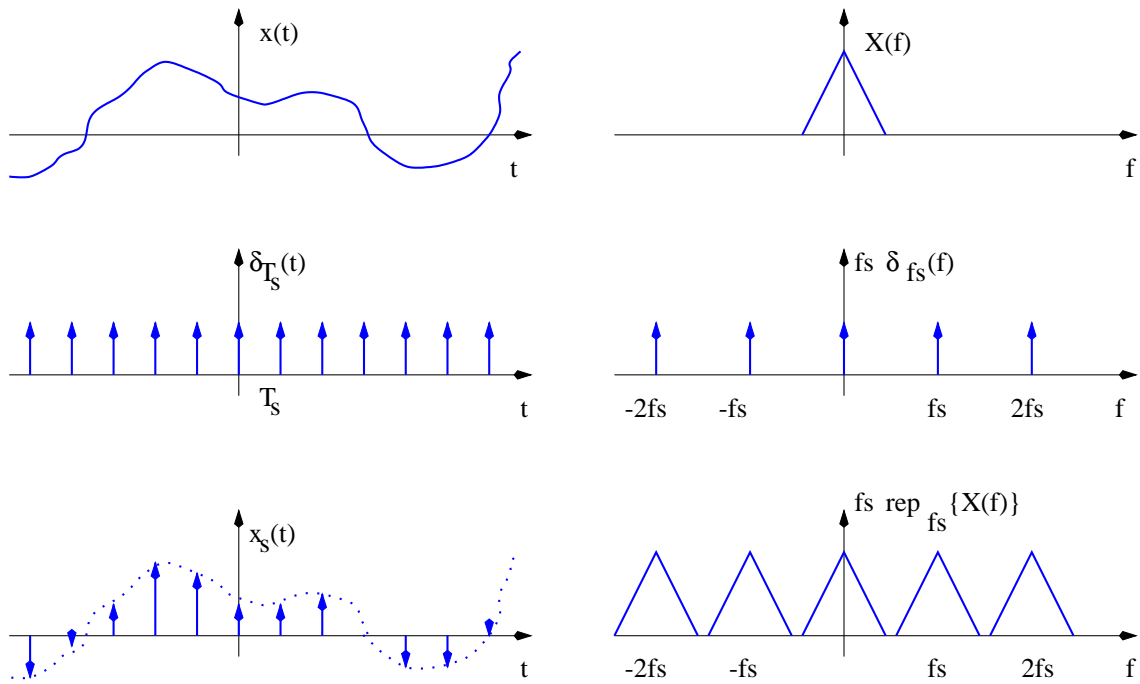
και ότι

$$F\{\delta_{T_s}(t)\} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k\frac{1}{T_s}) = T_s^{-1}\delta_{1/T_s}(f) = f_s\delta_{f_s}(f)$$

όπου $f_s = 1/T_s$, τότε

$$X_s(f) = X(f) \star f_s\delta_{f_s}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s X(f - nf_s) = f_s \text{rep}_{f_s}\{X(f)\}$$

όπου rep_{f_s} σημαίνει επανάληψη (repetition) κάθε f_s . Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η δειγματοληψία στο χρόνο με ρυθμό T_s έχει ως αποτέλεσμα την επανάληψη του φάσματος περιοδικά με περίοδο $f_s = 1/T_s$. Η διαδικασία της (ιδανικής) δειγματοληψίας στο χρόνο και στη συχνότητα



Σχήμα 2: Δειγματοληψία στο χρόνο και το αποτέλεσμα αυτής στο χώρο της συχνότητας.

φαίνονται στο Σχήμα. 2, όπου για να απλουστεύσουμε το σχήμα θεωρούμε ότι ο Μ.Φ. $X(f)$ του $x(t)$ είναι ένα θετικό πραγματικό μέγεθος. Από τον ορισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για περιοδικά σήματα με περίοδο T

$$\phi_x(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt$$

βρίσκουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της παλμικής σειράς Dirac είναι

$$\phi_{\delta_{T_s}}(\tau) = T_s^{-1} \delta_{T_s} = f_s \delta_{T_s}$$

Τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των δειγμάτων του σήματος είναι

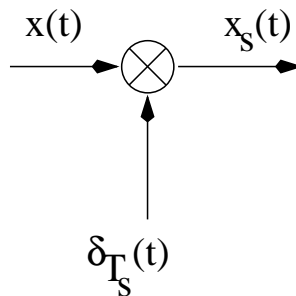
$$\begin{aligned} \phi_{x_s}(\tau) &= \phi_x(\tau) \phi_{\delta_{T_s}}(\tau) \\ &= f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_x(kT_s) \delta(\tau - kT_s) \end{aligned}$$

και η φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\begin{aligned}
 \Phi_{x_s}(f) &= F\{\phi_{x_s}(\tau)\} \\
 &= F\{\phi_x(\tau)\} \star f_s F\{\delta_{T_s}\} \\
 &= \Phi_x(f) \star f_s f_s \delta_{f_s}(f) \\
 &= \Phi_x(f) \star f_s^2 \delta_{f_s}(f) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 \Phi_x(f - n f_s) \\
 &= f_s^2 \text{rep}_{f_s}\{\Phi_x(f)\}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή, όπως και το φάσμα συχνοτήτων του αναλογικού σήματος, έτσι και η φασματική πυκνότητα ισχύος του αναλογικού σήματος, $\Phi_x(f)$, επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο f_s όταν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτηθεί με ρυθμό $T_s = 1/f_s$.

Στο Σχήμα. 3 φαίνεται το διάγραμμα της ιδανικής δειγματοληψίας.

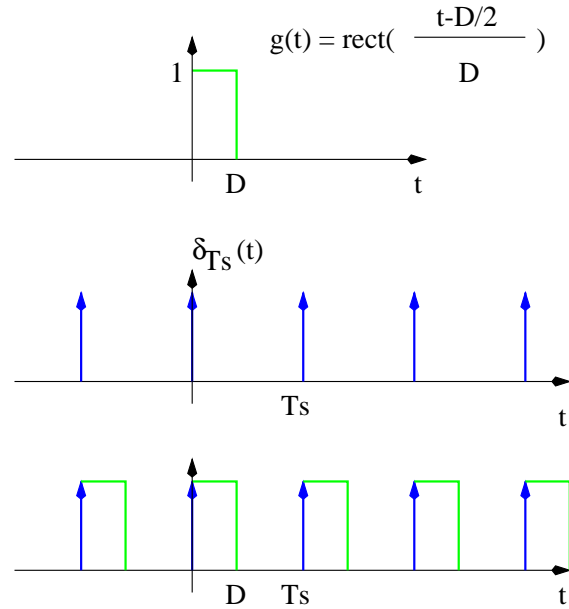


Σχήμα 3: Διάγραμμα ιδανικής δειγματοληψίας.

Το σήμα που λαμβάνουμε μετά την ιδανική δειγματοληψία (βλ. Σχήμα. 2 τελευταίο σχήμα αριστερά) είναι μια σειρά από παλμούς Dirac. Ένα τέτοιο σήμα δεν είναι πραγματοποιήσιμο μιας και οι τιμές των δειγμάτων δεν έχουν διάρκεια. Γι'αυτό και η ονομασία ιδανική δειγματοληψία. Μπορούμε επίσης να βγάλουμε το ίδιο συμπέρασμα (δηλ. ότι το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί) ελέγχοντας το φάσμα του σήματος μετά τη δειγματοληψία. Για παράδειγμα στο Σχήμα. 2 φαίνεται ότι το (βασικό) φάσμα που αντιστοιχεί στο αναλογικό σήμα επαναλαμβάνεται στο άπειρο χωρίς καμμία βαθμιαία μείωση καθώς η συχνότητα τείνει στο άπειρο ($|f| \rightarrow \infty$). Βλέπουμε λοιπόν πως είτε από το χώρο του χρόνου είτε από το χώρο της συχνότητας φτάνουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Για να μπορούμε να πραγματοποιήσουμε ένα διακριτό σήμα, θα πρέπει τα δείγματα που θα πάρουμε από το αναλογικό σήμα να έχουν κάποια (έστω και μικρή) διάρκεια. Για να πετύχουμε

κάτι τέτοιο αντικαθιστούμε τη σειρά παλμών Dirac με σειρά από τετραγωνικούς παλμούς διάρκειας D . Αυτό με τη σειρά του μπορεί να προκύψει από συνέλιξη ενός βασικού παλμού διάρκειας D μετατοπισμένου κατά $D/2$ με τη σειρά παλμών Dirac όπως φαίνεται στο Σχήμα. 4 Ο βασικός



Σχήμα 4: Συνέλιξη ορθογώνιου παλμού με σειρά παλμών Dirac.

ορθογώνιος παλμός μήκους D που είναι μετατοπισμένος κατά $D/2$ γράφεται ως

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t - D/2}{D}\right)$$

οπότε ο Μ.Φ. αυτού του παλμού είναι

$$G(f) = D \text{sinc}(fD) e^{-j\pi f D} \quad (1)$$

Δεδομένου ότι ο Μ.Φ. του σήματος μετά την ιδανική δειγματοληψία είναι

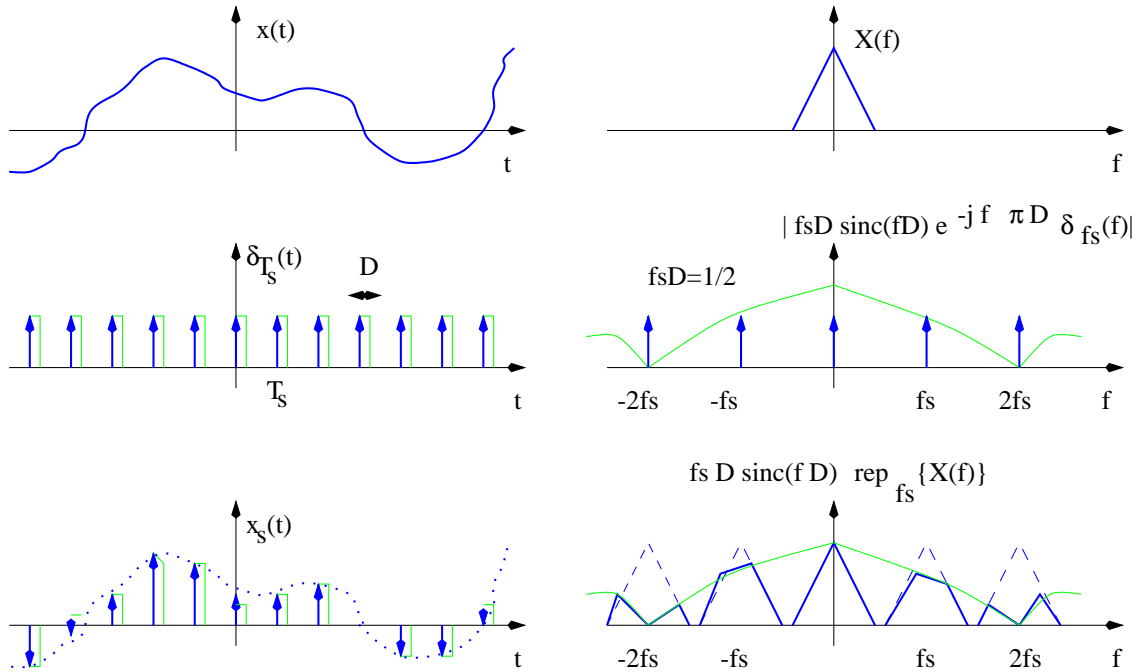
$$X_s(f) = f_s \text{rep}_{f_s}\{X(f)\} \quad (2)$$

ο Μ.Φ. του σήματος που προκύπτει όταν παρεμβάλουμε τον ορθογώνιο παλμό θα είναι

$$\begin{aligned} X_{sh}(f) &= X_s(f)G(f) \\ &= D f_s \text{sinc}(fD) \text{rep}_{f_s}\{X(f)\} e^{-j\pi f D} \end{aligned} \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος θα επαναλαμβάνεται περιοδικά όπως και στην ιδανική δειγματοληψία. Όμως η βασική διαφορά είναι ότι σε αυτή την περίπτωση

το φάσμα θα πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση *sinc*. Έτσι, το φάσμα θα τείνει στο μηδέν καθώς η συχνότητα θα τείνει στο άπειρο. Στο Σχήμα. 5 φαίνεται ένα παράδειγμα μη ιδανικής δειγματοληψίας όπου η διάρκεια του παλμού είναι $D = 1/(2 f_s)$. Όταν χρησιμοποιούμε ορθογώ-



Σχήμα 5: Μη ιδανική δειγματοληψία στο χρόνο και το αποτέλεσμα αυτής στο χώρο της συχνότητας.

νιο παλμό διάρκειας D για τη δειγματοληψία, το σήμα μετά τη δειγματοληψία έχει την ίδια τιμή για αυτή την διάρκεια (όπως φαίνεται και από το Σχήμα. 5 - κάτω αριστερά). Δηλ. διατηρεί την ίδια τιμή για χρόνο D . Για αυτό το λόγο αυτός ο τρόπος δειγματοληψίας ονομάζεται και δειγματοληψία με διατήρηση τιμής (sampling with holding). Το διάγραμμα αυτής της δειγματοληψίας με διατήρηση τιμής φαίνεται στο Σχήμα. 6(α) και περιγράφει διαγραμματικά τη σχέση

$$x_{sh}(t) = x(t)[\delta_{T_s}(t) \star g(t)]$$

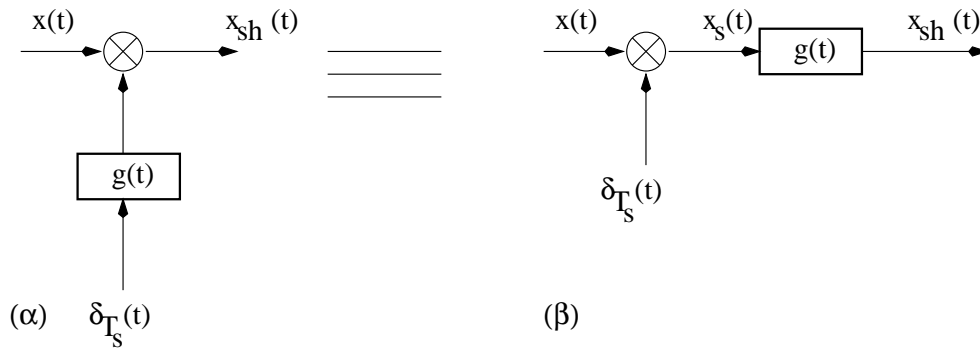
Επειδή η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και ως

$$x_{sh}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] \star g(t)$$

δίνουμε στο Σχήμα. 6(β) το ισοδύναμο στο πρώτο διάγραμμα που περιγράφει τη δεύτερη σχέση.

Από την Εξ. 3 προκύπτει ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος του δειγματοληπτημένου σήματος με διατήρηση τιμής είναι

$$\Phi_{x_{sh}}(f) = D^2 f_s^2 \text{sinc}^2(fD) \text{rep}_{f_s} \{ \Phi_x(f) \} \quad (4)$$



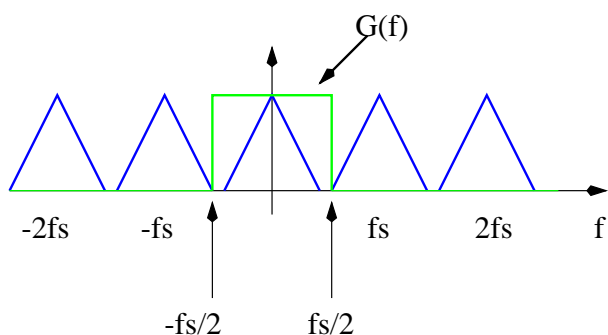
Σχήμα 6: Δύο ισοδύναμα διαγράμματα για την δειγματοληψία με διατήρηση τιμής.

όπου $\Phi_x(f)$ είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος του αναλογικού σήματος.

Ανασυγκρότηση του αναλογικού σήματος

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή η δειγματοληψία είναι σημαντική γιατί μέσω αυτής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστές για την επεξεργασία πολλών σημάτων. Όμως υπάρχουν εφαρμογές όπου χρειαζόμαστε να επιστρέψουμε από την διακριτή μορφή στην αναλογική μορφή του σήματος. Δηλ. θα πρέπει να ανασυγκροτήσουμε (ανασυνθέσουμε) το αναλογικό σήμα από τα δείγματά του. Ένα παράδειγμα αποτελεί η μουσική απο CD. Το σήμα έχει σωθεί στο CD σε διακριτή μορφή. Όταν εμείς πατάμε το Play για να ακούσουμε μουσική θα πρέπει τα δείγματα του σήματος της μουσικής να ανασυνθέσουν το αναλογικό σήμα της μουσικής. Μόνο σε μια τέτοια μορφή θα φτάσει η μουσική ευχάριστα στα αυτιά μας².

Όπως μελετήσαμε την ιδανική δειγματοληψία, θα μελετήσουμε και την ιδανική ανασυγκρότηση του αναλογικού σήματος από τα δείγματά του. Από το Σχήμα. 2 παρατηρούμε ότι το φάσμα του αναλογικού σήματος περιέχεται μέσα στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος. Συγκεκριμένα, είναι το φάσμα που περικλείεται ανάμεσα στις συχνότητες $-f_s/2$ έως $f_s/2$. Επομένως μπορούμε να ανακτήσουμε το αναλογικό σήμα ανακτώντας αρχικά το φάσμα του και μετά με ανάστροφο μετασχηματισμό Fourier το αναλογικό σήμα. Η ανάκτηση του φάσματος μπορεί να γίνει με την εφαρμογή ενός παράθυρου στη συχνότητα που θα απομονώσει το φάσμα από $-f_s/2$ έως $f_s/2$ όπως φαίνεται στο Σχήμα. 7. Το παράθυρο ενεργεί ως φίλτρο μηδενίζοντας ότι



Σχήμα 7: Απομόνωση συχνοτήτων με τη χρήση ορθογώνιου παράθυρου (φίλτρου).

βρίσκεται εκτός των ορίων $[-f_s/2, f_s/2]$ ενώ διατηρεί ανέπαφη ό,τι πληροφορία βρίσκεται ανάμεσα στις παραπάνω συχνότητες. Η μαθηματική έκφραση του φίλτρου στο χώρο της συχνότητας είναι:

$$G(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

²εχτός και αν προτιμάμε να ακούσουμε bits αντί για νότες - περί ορέξεως ουδέν λόγος βέβαια ...

Ο συντελεστής $1/f_s$ είναι απαραίτητος γιατί λόγω της δειγματοληψίας το φάσμα του σήματος έχει πολλαπλασιαστεί με f_s (βλ. Σχήμα. 2). Έτσι με αυτόν τον τρόπο το αποτέλεσμα θα είναι ίσο με το αρχικό φάσμα $X(f)$:

$$X(f) = X_s(f) G(f)$$

Επειδή πολλαπλασιασμός στο χώρο της συχνότητας σημαίνει συνέλιξη στο χώρο του χρόνου, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής στο χώρο του χρόνου:

$$x(t) = x_s(t) \star g(t) \quad (5)$$

όπου

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t)$$

και

$$\begin{aligned} g(t) &= T_s f_s \text{sinc}(t f_s) \\ &= \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \end{aligned}$$

όπου βέβαια $f_s T_s = 1$. Η Εξ. 5 τότε γράφεται

$$\begin{aligned} x(t) &= [x(t)\delta_{T_s}(t)] \star g(t) \\ &= g(t) \star \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)g(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - k\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Η Εξ. 6 είναι πολύ σημαντική. Μας λέει ότι ιδανικά ένα αναλογικό σήμα (το οποίο ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή - άρα σε άπειρες χρονικές στιγμές) μπορεί να ανασυγκροτηθεί όταν τα δείγματά του $x(kT_s)$ (δηλαδή από κάποιες διακριτές μόνο χρονικές στιγμές του σήματος) συνδυαστούν γραμμικά με τη συνάρτηση *sinc*.

Εφαρμογές της δειγματοληψίας στις Τηλεπικοινωνίες

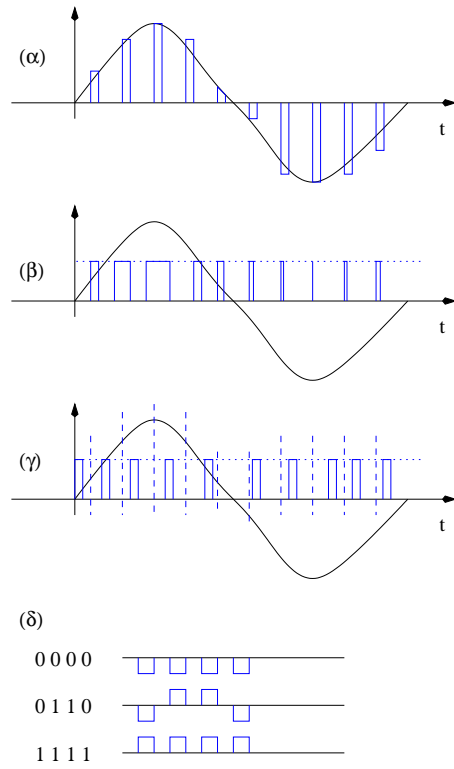
Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η δειγματοληψία δίνει τη δυνατότητα να επεξεργαστούμε με υπολογιστές πολλά είδη σημάτων. Ένα σημαντικό πεδίο εφαρμογής της δειγματοληψίας είναι στις Τηλεπικοινωνίες.

Η δειγματοληψία μας επιτρέπει να στείλουμε αντί του αναλογικού σήματος μια σειρά από παλμούς (ψηφιακή επικοινωνία). Με αυτό τον τρόπο μπορούμε εύκολα να ενισχύσουμε το σήμα στα σημεία αναμετάδοσης του σήματος. Η ενίσχυση του σήματος σε τακτά χρονικά διαστήματα είναι αναγκαία λόγω εξασθένησης του εκπεμπόμενου σήματος. Το κακό στην περίπτωση του αναλογικού σήματος είναι ότι μαζί με το χρήσιμο σήμα φτάνει στον αναμεταδότη και θόρυβος που προέρχεται π.χ. από μηχανικές λειτουργίες του συστήματος.

Όταν ένας αναμεταδότης ενισχύει το χρήσιμο σήμα ενισχύει ταυτόχρονα και το θόρυβο. Η συχνή επανάληψη της ενίσχυσης θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταφορά μαζί με το χρήσιμο σήμα και ισχυρό θόρυβο με αποτέλεσμα τη μείωση της ποιότητας της επικοινωνίας.

Αντίθετα η χρήση παλμών μέσω της δειγματοληψίας του αναλογικού σήματος δίνει τη δυνατότητα στον αναμεταδότη να εκτιμήσει που βρίσκονται οι παλμοί και να ξαναφτιάξει από την αρχή το μεταδιδόμενο σήμα μηδενίζοντας έτσι το θόρυβο που έχει φτάσει μέχρι τον αναμεταδότη. Αυτός είναι ένας βασικός λόγος για τον οποίο τα συστήματα ψηφιακής επικοινωνίας έχουν υψηλή ποιότητα μετάδοσης δεδομένων σε σχέση με τα συστήματα αναλογικής μετάδοσης.

Παραδείγματα παλμικής διαμόρφωσης φαίνονται στο Σχήμα. 8



Σχήμα 8: Διάφορα συστήματα παλμικής διαμόρφωσης. (α) Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος - Pulse Amplitude Modulation-PAM, (β) Διαμόρφωση παλμών κατά εύρος - Pulse Width Modulation-PWM, (γ) Διαμόρφωση παλμών κατά θέση - Pulse Position Modulation-PPM, (δ) Παλμοκωδική διαμόρφωση - Pulse Code Modulation-PCM

Ιδεατό φίλτρο

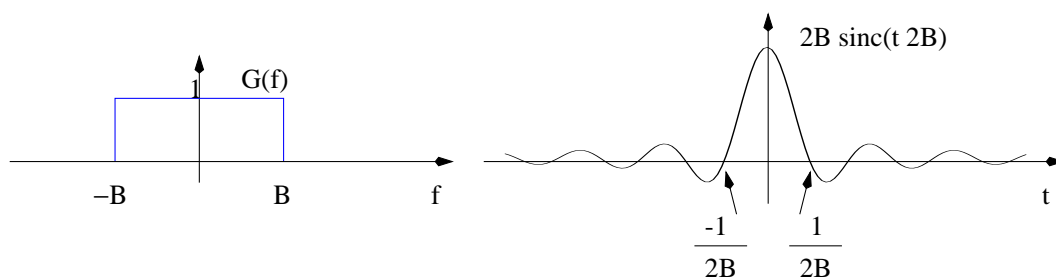
Στα προηγούμενα είδαμε ότι για να ανασυγκροτήσουμε το αναλογικό σήμα από τα δείγματά του αρκούσε να πολλαπλασιάσουμε το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος (δηλ. των δειγμάτων του σήματος) με ένα φίλτρο που είχε σχήμα ορθογώνιου παράθυρου. Όπως γνωρίζουμε, ένα τέτοιο σήμα στη συχνότητα θα αντιστοιχεί σε ένα *sinc* στο χρόνο. Συγκεκριμένα αν το φίλτρο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$$G(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

τότε έχει εύρος συχνοτήτων $2B$, από τη συχνότητα $f = -B$ έως τη συχνότητα $f = B$ έχει πλάτος 1 και εκτός αυτού του εύρους συχνοτήτων έχει πλάτος 0. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $G(f)$ θα μας δίνει μια περιγραφή του φίλτρου στο χρόνο:

$$g(t) = F^{-1}\{G(f)\} = 2B \text{sinc}(t 2B)$$

όπου F^{-1} σημαίνει αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier. Το φίλτρο στο χώρο της συχνότητας και του χρόνου φαίνεται στο Σχήμα. 9. Σημειώστε ότι το φίλτρο που απεικονίζει το Σχήμα. 9



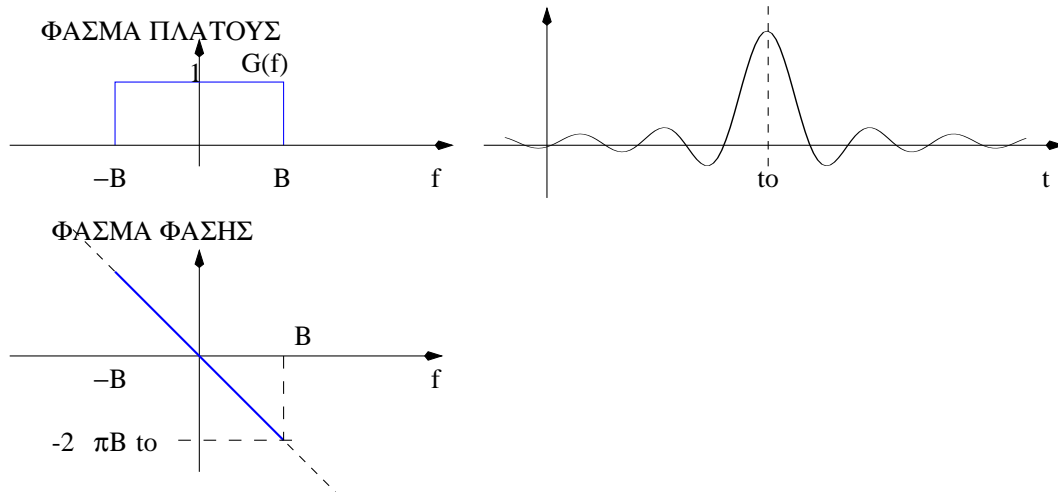
Σχήμα 9: Φίλτρο παραθύρου στη συχνότητα (αριστερά) και στο χρόνο (δεξιά)

έχει μηδενική φάση.

Το πρόβλημα με αυτό το φίλτρο είναι ότι το σήμα που του αντιστοιχεί στο χρόνο ($g(t)$) είναι ένα μη αιτιατό σήμα ($g(t) \neq 0$, για $t < 0$), επομένως μη πραγματοποιήσιμο. Αρα δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να απομονώσουμε τις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Μια λύση (και μοναδική) είναι να μεταφέρουμε το $g(t)$ δεξιά στο χρόνο π.χ. κατά $t = t_0$ έτσι ώστε η περισσότερη ενέργεια του σήματος να βρίσκεται στον θετικό άξονα του χρόνου. Σε μια τέτοια περίπτωση ίσως να μπορούμε να αμελήσουμε το μέρος του σήματος που είναι στον αρνητικό άξονα του χρόνου μιας και αυτό το μέρος δεν θα έχει πολύ μεγάλο πλάτος (ενέργεια). Καταρχήν, μια τέτοια μετακίνηση του σήματος στο χρόνο θα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας γραμμικής φάσης

στο φάσμα του φίλτρου. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα. 10, όπου το σήμα $g(t)$ έχει μετατοπιστεί δεξιά κατά $t = t_0$.

Αυτό σημαίνει ότι το σήμα που θα λάβουμε μετά το φιλτράρισμα θα περιέχει πέρα της δικής

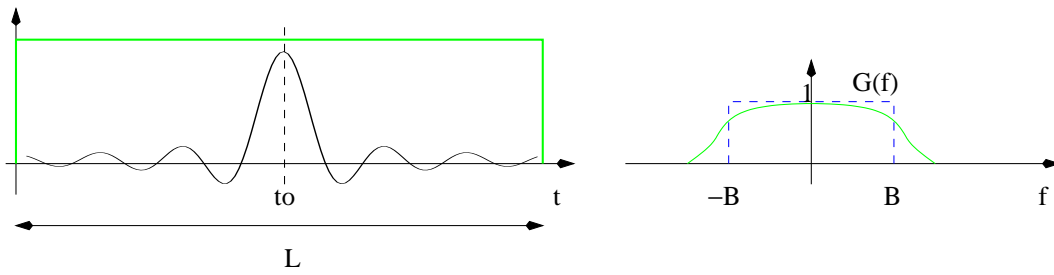


Σχήμα 10: Φίλτρο παραθύρου στη συχνότητα (αριστερά) και στο χρόνο (δεξιά) όταν το σήμα του φίλτρου μετατοπιστεί δεξιά στο χρόνο κατά $t = t_0$

του φάσης και μια πρόσθετη: την γραμμική φάση του φίλτρου. Ευτυχώς μια τέτοια φάση μπορεί εύκολα να αφαιρεθεί αν γνωρίζουμε την μετατόπιση t_0 . Από το Σχήμα. 10 παρατηρούμε επίσης ότι το φάσμα πλάτους του φίλτρου δεν αλλάζει (αναμενόμενον!!).

Παρόλα αυτά το φίλτρο και πάλι δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί αφού η διάρκειά του επεκτείνεται έως το άπειρο ($+\infty$). Για να μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τελικά το φίλτρο, θα πρέπει να το περιορίσουμε και στον θετικό άξονα του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με ένα παράθυρο π.χ. μήκους L . Αν το L είναι μικρό το σφάλμα στην πραγματοποίηση του φίλτρου θα είναι μεγάλο. Ομως τότε θα έχουμε ένα μικρού μήκους φίλτρο που είναι εύκολα πραγματοποιήσιμο και η συνέλιξη του σήματος με το φίλτρο θα υπολογίζεται γρήγορα. Αν αντίθετα το μήκος L το επιλέξουμε να είναι μεγάλο, τότε το σφάλμα στην πραγματοποίηση του φίλτρου θα είναι μικρό αλλά το φίλτρο θα είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί και θα είναι και χρονοβόρο στο να φιλτράρει ένα σήμα. Ο πολλαπλασιασμός του $g(t - t_0)$ με ένα παράθυρο μήκους L φαίνεται στο Σχήμα. 11. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι τώρα και το φάσμα πλάτους έχει αλλάξει. Το ιδεατό φάσμα πλάτους φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή ενώ το φίλτρο που θα προκύψει μετά τον πολλαπλασιασμό του $g(t - t_0)$ με το παράθυρο είναι με συνεχή γραμμή. Όταν μεγαλώσουμε το μήκος L τότε το φάσμα πλάτους θα πλησιάσει περισσότερο

το φάσμα πλάτους του ιδεατού φίλτρου (αλλά με τα γνωστά προβλήματα).



Σχήμα 11: Ιδανικό (διακεκομμένη γραμμή) και πραγματοποιήσιμο (συνεχές γραμμή) φίλτρο παραθύρου.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, **Ιωάννης Στυλιανού**. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Δειγματοληψία». Έκδοση: 1.0. **Ηράκλειο/Ρέθυμνο** 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

