



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διάλεξη 3η: Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 370

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$


$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n)$$

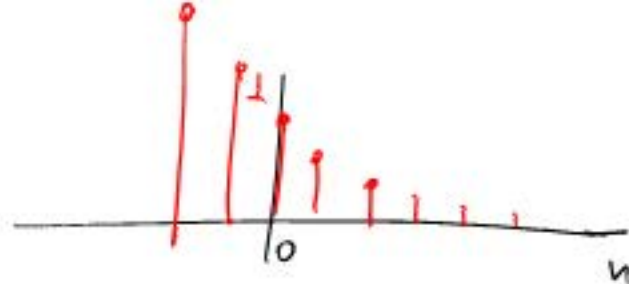
$$\left. \begin{aligned} x[n+N] &= x[n] \\ N &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow N = \frac{2\pi \cdot k}{\omega_0}$$

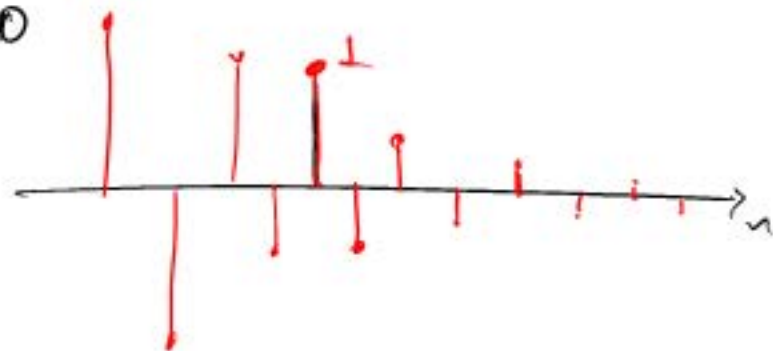
$$N, k \in \mathbb{Z}$$

$$x[n] = a^n$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$$



$$|a| < 1 \quad -1 < a < 0$$



$$a \in \mathbb{C}$$

$$|a| = 1$$

$$\alpha = e^{j\omega_0}$$

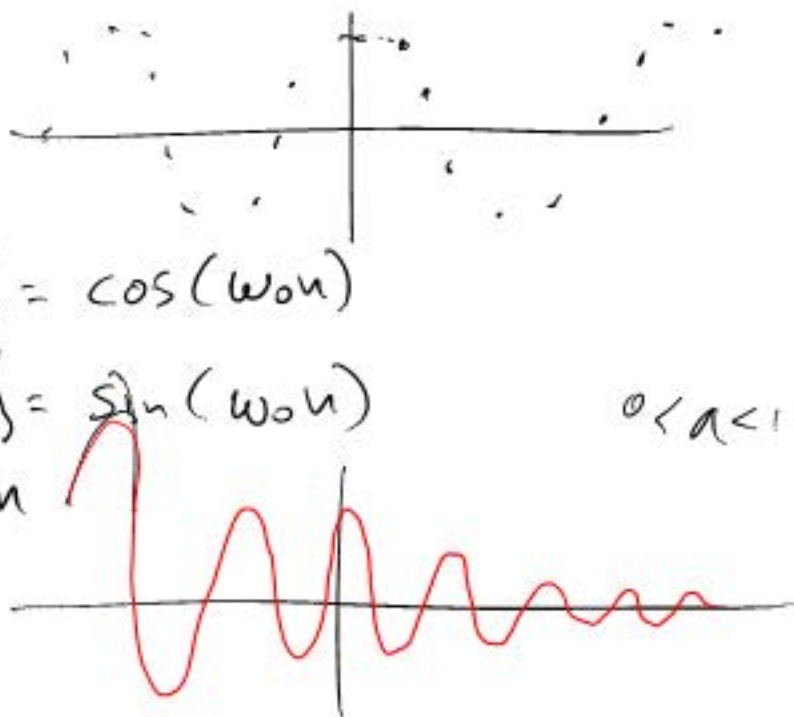
$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

$$\rightarrow \text{Re}\{x[n]\} = \cos(\omega_0 n)$$

$$\text{Im}\{x[n]\} = \sin(\omega_0 n)$$

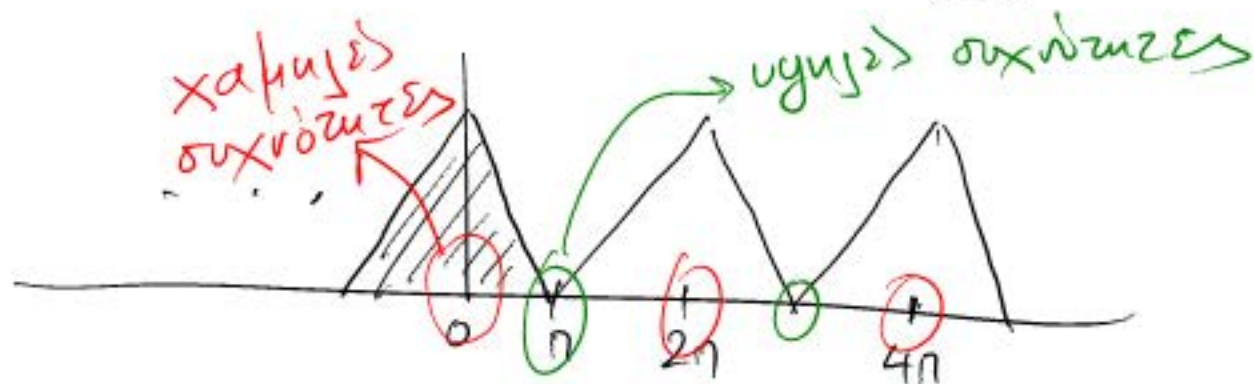
$$0 < a < 1$$

$$x[n] = (\alpha e^{j\omega_0})^n = \alpha^n e^{j\omega_0 n}$$



$$x[n] = A \cdot e^{j\omega_0 n}$$

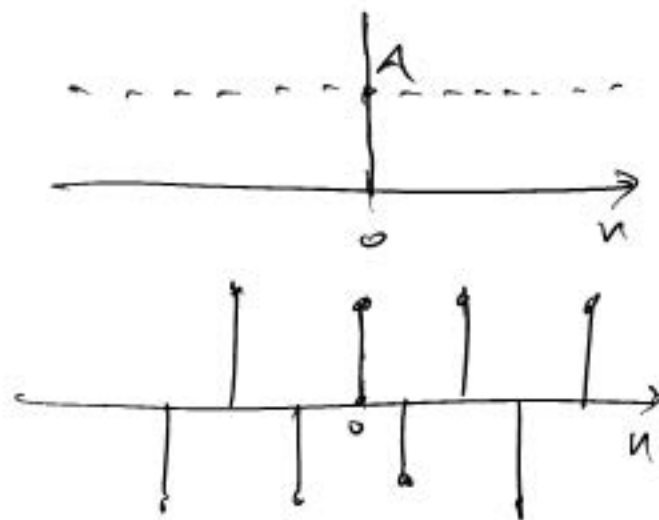
$$\omega'_0 = \omega_0 + 2\pi \Rightarrow x'[n] = A \cdot e^{j\omega_0 n} \cdot \underbrace{e^{j2\pi n}}_1 = A \cdot e^{j\omega_0 n} = x[n]$$



$$x[n] = A \cos(\omega_0 n)$$

$$\Delta \omega_0 = 0 \Rightarrow x[n] = A \quad \forall n$$

$$\Delta \omega_0 = \pi \Rightarrow x[n] = A (-1)^n$$



$$f = \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$$

$$x_2(t) = \cos\left(\frac{3\pi t}{4}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{3\pi/4} = \frac{8}{3}$$

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) \rightarrow N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot k$$

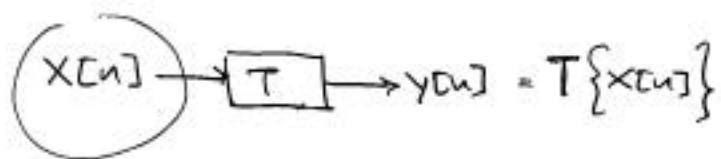
$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$

$$N_0 = \frac{2\pi}{\pi/4} \cdot k = 8 \cdot k \stackrel{k=1}{=} 8$$

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{4} n\right)$$

$$N'_0 = \frac{2\pi}{3\pi/4} \cdot k = \frac{8}{3} \cdot k \stackrel{k=3}{=} 8$$





• $y[n] = x[n - n_0]$

• $y[n] = x^2[n]$ ←

• $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

$\left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = y(t) \right) \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] = y[n-1] + x[n]$

• **Causal**
 $y[n] = x[n] - x[n-1]$ $\left(\frac{dx(t)}{dt} = y(t) = \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \right)$

• **Non Causal**
 $y[n] = x[n+1] - x[n]$

μη αιτιατο σιστημα



$y[n_0] = f(x[n]), n \leq n_0$

A. $x_1[n] = x_2[n]$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $y_1[n] = y_2[n]$
για $n \leq n_0$

για $n \leq n_0 \Rightarrow$
 $x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n]$
 $x_2[n] \xrightarrow{T} y_2[n]$

$$x[n] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y[n]$$

Ευστάθεια stability

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \forall n \Rightarrow |y[n]| \leq B_y < \infty \forall n$$

* $\delta[n] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y[n] = h[n]$ μοναδιαία απόκριση
impulse response

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k]$$

Γραμμικότητα

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xrightarrow{T} y[n] = T \{x[n]\} \Rightarrow y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

$$\text{όπου } y_k[n] = T \{x_k[n]\}$$

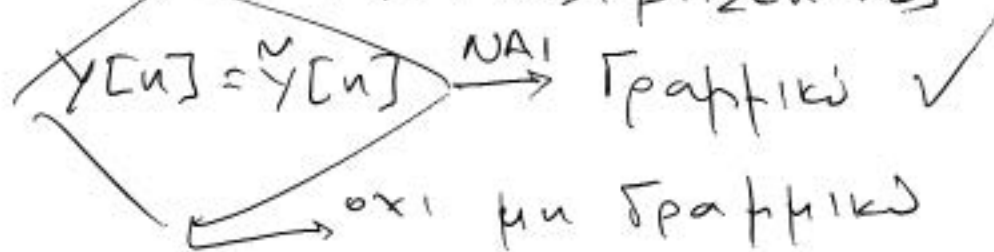
$$T: \begin{cases} y[n] = x[n - n_0] \\ x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] = x_1[n - n_0] \\ x_2[n] \xrightarrow{T} y_2[n] = x_2[n - n_0] \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

$$= \alpha x_1[n - n_0] + \beta x_2[n - n_0]$$

$$\hookrightarrow y[n] = x[n - n_0] = \alpha x_1[n - n_0] + \beta x_2[n - n_0]$$



Γραμμικότητα \rightarrow Linear

$y[n] = x^2[n]$ Δεν είναι γραμμικό.

a) $x[n] = x_1[n] + x_2[n] \Rightarrow y[n] = x_1^2[n] + x_2^2[n] + 2x_1[n]x_2[n]$

b) $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1^2[n]$

$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = x_2^2[n]$

$\tilde{y}[n] = y_1[n] + y_2[n] = x_1^2[n] + x_2^2[n]$

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k] \xrightarrow[\text{γραμμ.}]{T} y[n] = T \left\{ \sum_k x[k] \delta[n-k] \right\} = \sum_k x[k] T \{ \delta[n-k] \}$$

Χρονικά μετατόπιση

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n] \Rightarrow x[n-n_0] \xrightarrow{T} y[n-n_0]$$

$T: y[n] = x[n-n_d]$

① καθυστέρηση εισόδου
 $x_1[n] = x[n-n_0]$

$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1[n-n_d] = x[n-n_d-n_0]$

② καθυστέρηση εξόδου

$\rightarrow y[n-n_0] = x[n-n_0-n_d]$

δ, a, \dots
αρα
 $y[n] = x[n-n_d]$
Χρονικά αμετ.

$y[n] = x[Mn]$ είναι χρ. α-στάθμιστο? **ΟΧΙ**

$M \in \mathbb{Z}$

Πύλαση 1) $x_1[n] = x[n-n_0]$

$y_1[n] = x_1[Mn] = x[Mn-n_0]$

2) $y[n-n_0] = x[M(n-n_0)] = x[Mn-Mn_0]$

$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k] \xrightarrow[\text{T.X.A.}]{T} y[n] = \sum_k x[k] T\{\delta[n-k]\} =$
↓
συντικτώμενα



$= \sum_k x[k] h[n-k]$
X.A.



HY215:
 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

$y[n] = x[n] * h[n]$
 συνέλιξη

Αν T είναι **T.X.A.** $\Rightarrow x[n] \xrightarrow{T} y[n] = \sum_k x[k] h[n-k]$
 όπου $h[n-k] = T\{\delta[n-k]\}$

$$x[n] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y[n]$$

- Μνήμη \rightarrow κώδικας
- Ευρεσιγασίες \rightarrow αλγόριθμοι
- Αιτιατό \rightarrow πραγματοποίηση

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Γραφικοί} \\ \bullet \text{ Χρον. Αξίες.} \end{array} \right\} y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k] h[n-k] \leftarrow$$

$$y[n] = f(x[n])$$

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k] \Big|_{n=n_0} x[n_0]$$

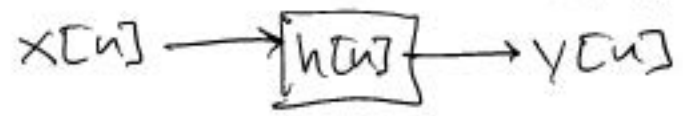
$$\sum_k x[k] \delta[n-n_d-k] \Big|_{n=n_0} = x[n_0-n_d] \xrightarrow{\forall n} \boxed{x[n-n_d] = x[n] * \delta[n-n_d]}$$

$$y[n] \xrightarrow{T} x[n-n_d] \Rightarrow \boxed{h[n] = \delta[n-n_d]}$$

Σύνδεση σε σειρά



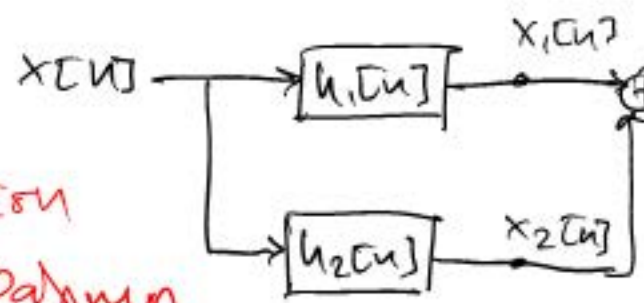
$$\left. \begin{aligned} y[n] &= x_1[n] * h_2[n] \\ x_1[n] &= x[n] * h_1[n] \end{aligned} \right\} \Rightarrow y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



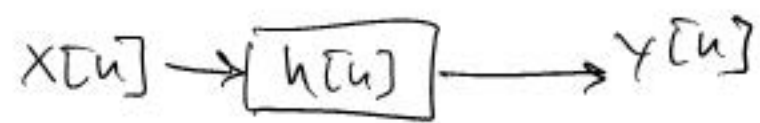
όπου $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$

$$\begin{aligned} &= x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \\ &= x[n] * h[n] \end{aligned}$$

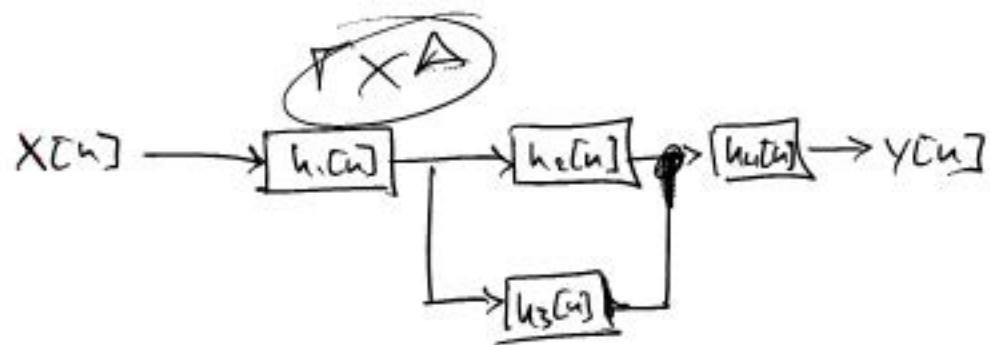
Σύνδεση
Παράλληλων



$$\begin{aligned} y[n] &= x_1[n] + x_2[n] \\ &= x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = \\ &= x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) \end{aligned}$$



$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$



$$Y(\omega) = [h_1(\omega) * (h_2(\omega) + h_3(\omega)) * h_4(\omega)] * X(\omega) \quad ?$$

Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 3η: Συστήματα Διακριτού Χρόνου». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy370>