ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διάλεξη 6η: Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Ιωάννης Στυλιανού
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY370

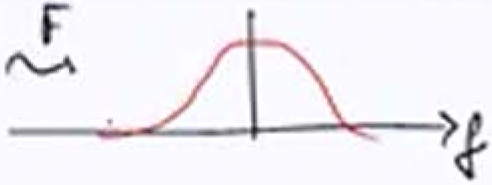
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Γ.Χ.Α.

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$$= \sum_{k} x[k]\, h[n-k]$$

$y[n]-ay[n-1]=x[n] \rightsquigarrow h[n]=a^n u[n] \overset{F}{\rightsquigarrow}$



$$f(x) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \alpha\cdot f(x)$$

→ eigenfunction

$f(x)$: ιδιοσυνάρτηση του συστήματος αν α είναι σταθερά.

$\boxed{\text{Γ.Χ.Α}}$ $\quad x[n]=e^{j\omega_0 n}$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega_0 n}\cdot e^{-j\omega_0 k}=$$

$$=e^{j\omega_0 n}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,e^{-j\omega_0 k}}_{H(e^{j\omega_0})} = \underset{\text{Σταθερά}}{\underset{\downarrow}{H(e^{j\omega_0})}}\cdot \underset{x[n]}{\underset{\downarrow}{e^{j\omega_0 n}}} = H(e^{j\omega_0})\,x[n]$$

Άρα $\underbrace{x[n]=e^{j\omega_0 n}}_{\text{ιδιοσυνάρτηση}} \longrightarrow \boxed{\text{Γ.Χ.Α.}} \longrightarrow y[n]=H(e^{j\omega_0})\cdot x[n]$

→ ιδιοσυχνότητα

→ ιδιοτιμή.

$$x[n] = \sum_k A_k \cdot e^{j\omega_k n} \rightarrow \boxed{\Gamma X A.} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = \sum_k A_k \cdot H(e^{j\omega_k}) \cdot e^{j\omega_k n}$$

$$= \alpha \cdot x[n] \begin{cases} \text{ΝΑΙ αν } H(e^{j\omega_k}) = \alpha \ \ \forall \omega_k \\ \text{ΟΧΙ σε κάθε άλλη περ.} \end{cases}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega_k}) = \sum_n h[n] e^{-j\omega_k n}}$$

$$\underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{Απόκριση σε συχνότητα}} = \sum_n \underbrace{h[n]}_{\text{Μοναδιαία Απόκριση}} \cdot e^{-j\omega n}$$

Μετ. Fourier

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n]\cdot e^{-j\omega n} = \underbrace{\sum_n h[n]\cos(\omega n)}_{H_R(e^{j\omega})} - j\underbrace{\sum_n h[n]\sin(\omega n)}_{H_I(e^{j\omega})}$$

Euler.

$$e^{-j\omega n} = \cos(-\omega n) + j\sin(-\omega n) = \cos(\omega n) - j\sin(\omega n)$$

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$$

$$\sin(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j}$$

$$z = a + jb = |z|\cdot e^{j\angle z}$$

Δηλ: $H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$

πλάτος $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$ φασματική απόκριση πλάτους

φάση $\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$ φασματική απόκριση φάσης

$y[n] = x[n-n_d]$
$x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$\Rightarrow y[n] = e^{j\omega_0(n-n_d)} = e^{-j\omega_0 n_d} \cdot e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0}) \cdot x[n]$

$$H(e^{j\omega_0}) = e^{-j\omega_0 n_d} \xrightarrow{\forall \omega} H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

$\hookrightarrow |H(e^{j\omega_0})| = 1$ $\qquad |H(e^{j\omega})| = 1 \quad \forall \omega$

$\measuredangle H(e^{j\omega_0}) = -\omega_0 n_d$ $\qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \quad \forall \omega$

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) \longrightarrow \underbrace{\Gamma.X.A}_{H(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n]$$

$\downarrow$ Euler

$$x[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega_0 n} \longrightarrow$$

$$y[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\omega_0 n}$$

$$\left.\begin{array}{l} y[n] = x[n-n_d] \\ x[n] = e^{j\omega_0 n} \end{array}\right| \Rightarrow y[n] = e^{j\omega_0(n-n_d)} = \underbrace{e^{-j\omega_0 n_d}} \cdot e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0}) \cdot x[n]$$

$$H(e^{j\omega_0}) = e^{-j\omega_0 n_d} \xrightarrow{\forall \omega} H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

$$\hookrightarrow |H(e^{j\omega_0})| = 1 \qquad\qquad |H(e^{j\omega})| = 1 \quad \forall \omega$$

$$\measuredangle H(e^{j\omega_0}) = -\omega_0 n_d \qquad\qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \quad \forall \omega$$

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) \rightarrow \underset{H(e^{j\omega})}{\underline{\Gamma.X.A}} \rightarrow y[n]$$

h[n]: πραγμ.

$\downarrow$ Euler

$$x[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega_0 n} \longrightarrow$$

$$y[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\omega_0 n}$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot |H(e^{j\omega_0})| \cdot e^{j\measuredangle H(e^{j\omega_0})} \cdot e^{j\omega_0 n} +$$

$$+ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} |H(e^{-j\omega_0})| \cdot e^{j\measuredangle H(e^{-j\omega_0})} \cdot e^{-j\omega_0 n}$$

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) \longrightarrow y[n] =$$

$h[n] \to$ πραγ.
ΓΧΑ

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega_0})| = |H(e^{-j\omega_0})| \\ \measuredangle H(e^{j\omega_0}) = -\measuredangle H(e^{-j\omega_0}) \end{cases}$$

$$y[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} |H(e^{j\omega_0})| e^{j\measuredangle H(e^{j\omega_0})} \cdot e^{j\omega_0 n} + $$
$$+ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} |H(e^{j\omega_0})| e^{-j\measuredangle H(e^{j\omega_0})} \cdot e^{-j\omega_0 n} =$$
$$= \frac{A}{2} |H(e^{j\omega_0})| \cdot \Big(\underbrace{e^{j(\omega_0 n + \varphi + \measuredangle H(e^{j\omega_0}))} + e^{-j(\omega_0 n + \varphi + \measuredangle H(e^{j\omega_0}))}}_{2\cos(\omega_0 n + \varphi + \measuredangle H(e^{j\omega_0}))}$$

$$\Rightarrow y[n] = A \cdot |H(e^{j\omega_0})| \cdot \cos(\omega_0 n + \varphi + \measuredangle H(e^{j\omega_0}))$$

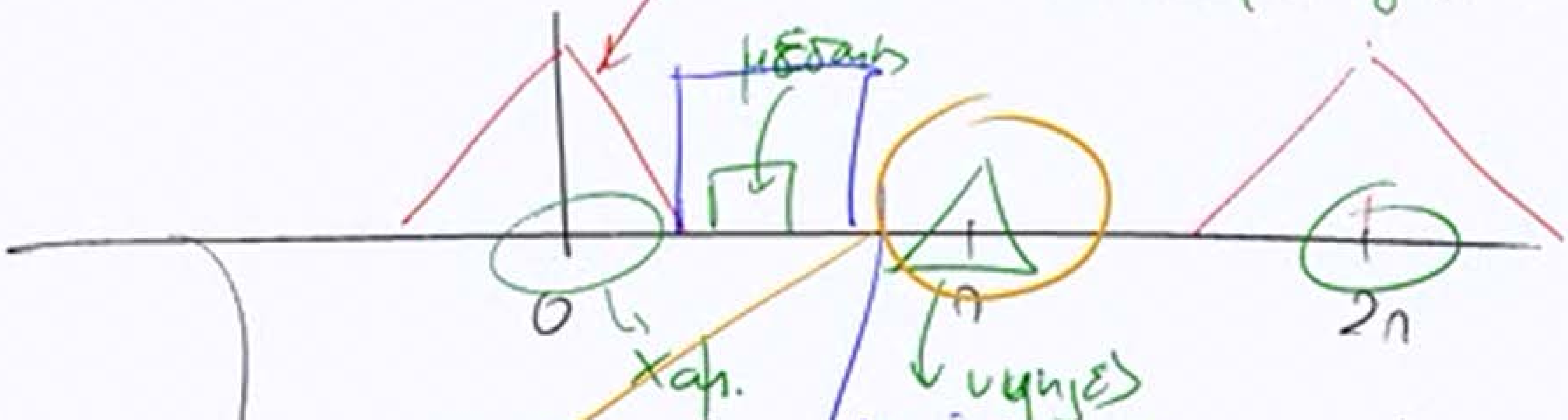
$$x[n] = A \cdot \cos\big(\omega_0 n + \varphi\big)$$

h[n] μοναδιαία απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \quad \text{φασματική απόκριση}$$

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} = H(e^{j\omega})$$

$H_1(e^{j\omega}) \rightsquigarrow$ βαθυπερατό φίλτρο (low-pass filter)



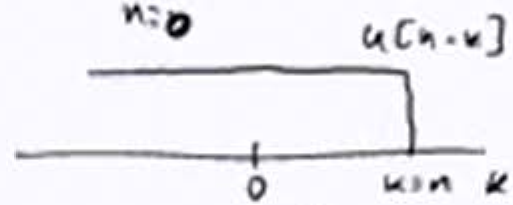
$H_2(e^{j\omega}) \rightsquigarrow$ ζωνοπερατό φίλτρο (bandpass filter)

$H_3(e^{j\omega}) \rightsquigarrow$ υψιπερατό φίλτρο (high-pass filter)

Αν h[n] αιτιατό

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

• $x[n] = e^{j\omega n} \quad \forall n \xrightarrow[\substack{\text{h[n] κρ.} \\ \text{απ.} \\ \text{Γ.Χ.Α}}]{} H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$



• <u>Ξαφνική είσοδος</u>: $x[n] = e^{j\omega n} u[n]$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega n} \cdot e^{-j\omega k}\, u[n-k] = \overbrace{e^{j\omega n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}}^{y_s[n]} -$$

$$= \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot e^{j\omega n} \cdot e^{-j\omega k} = e^{j\omega n} \cdot \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot e^{-j\omega k} =$$

$$\underbrace{- e^{j\omega n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}}_{\substack{y_t[n] \\ \text{transitional}}}$$

• όχι ξαφ. είσοδος:

$$y[n] = e^{j\omega n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\omega k} = y[n]_{\substack{\text{μόνιμη} \\ \text{(steady state)}}}$$

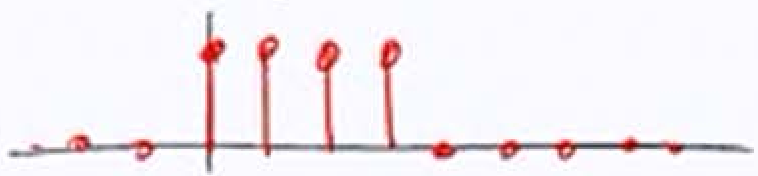
$$\rightarrow y[n] = y_s[n] + y_t[n]$$

$$y_t[n] = - e^{j\omega n} \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\omega k} \Rightarrow |y_t[n]| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]|$$

$$y_t[n]_0 \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |h_k[n]| \qquad y_t[n] = \sum_{k=n+1}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

- Σύστημα περιορισμένης (μοναδιαίας απόκρισης) διάρκειας: $h[n] = \begin{cases} \neq 0 & 0 \le n \le M-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

  Finite Impulse Response (FIR)

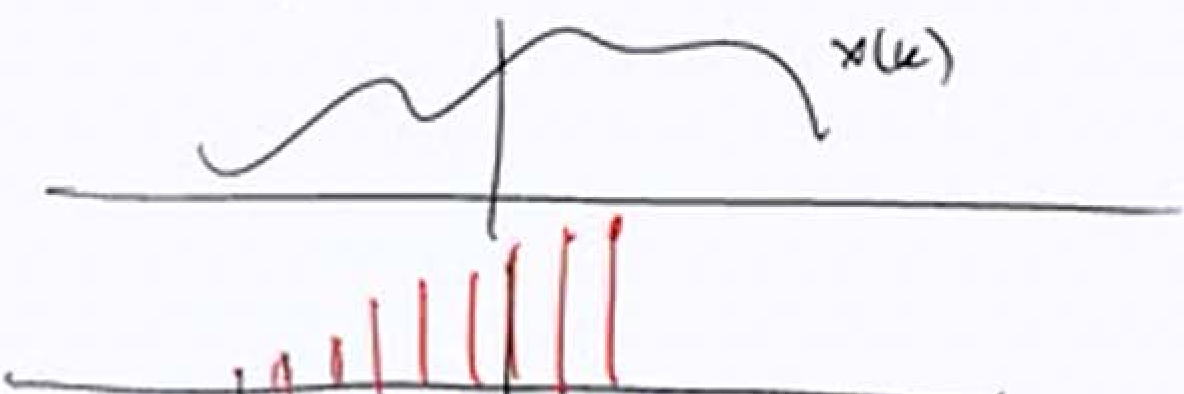


$$y_t[n] = 0 \qquad n \ge M-1$$

- Σύστημα μοναδιαίας απόκρισης απεριόριστης διάρκειας

  π.χ. $h[n] = a^n u[n]$

  Infinite Impulse Response (IIR)



Αν ισχύει

Ευσταθές $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k[n]| < \infty$

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} |h_k[n]| > \sum_{k=n_2}^{\infty} |h_k[n]|$$

$n_1 > n_2$

A $\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty \Rightarrow$ Euscad os

$$|y_t[n]| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$h[k] \neq 0$

$k \geq 0$

$$|y_t[n']| \leq \sum_{k=n'+1}^{\infty} |h[k]| < \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]|$$

$n' >> n$

$$\boxed{\begin{array}{c} |y_t[n']| < y_t[n] \\ n' > n \end{array}}$$

$$h[n] \xrightarrow{F} \boxed{H(e^{j\omega}) = \sum_{n} h[n]\, e^{-j\omega n}}$$

Μετ. Fourier Σήματος Διακριτού Χρόνου

$$\boxed{x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n} x[n] \cdot e^{-j\omega n}} \longrightarrow$$

Ευθύς Μετ. Fourier

$$\int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega m} \cdot d\omega = \int_{0}^{2\pi} \sum_{n} x[n] \cdot e^{-j\omega n} \cdot e^{j\omega m}\, d\omega =$$

$$= \sum_{n} x[n] \underbrace{\int_{0}^{2\pi} e^{j\omega(m-n)}\, d\omega}_{\begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = 2\pi \cdot x[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega}$$

Αντίστροφος Μετασχ. Fourier

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 6η: Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://www.csd.uoc.gr/~hy370