



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

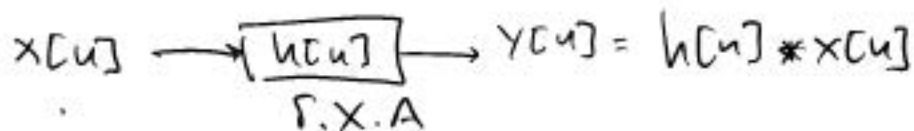
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διάλεξη 7η: Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου  
Ιδιότητες

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 370



Fast Fourier Transform (FFT) analysis:

$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$  (with "Fast Fourier Transform" and "α.π." written next to it)  
 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n} x[n] e^{-j\omega n}$

Steady-state response to a complex exponential:

$x[n] = e^{j\omega_0 n}$   
 $y[n] = H(e^{j\omega_0}) x[n]$

Annotations: "ιδιοσυχία" (eigenfrequency) points to  $e^{j\omega_0 n}$ ; "ιδιοσυχία" (eigenfrequency) points to  $H(e^{j\omega_0})$ .

Ξαφνικά είσοδο.

$x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$h[n] \rightsquigarrow y[n] = y_s[n] + y_t[n]$

Condition for bounded output:

$$|y_t[n]| \rightarrow \text{as } \sum |h[n]| < \infty \quad \text{Εύσ.}$$

FIR Εύστ. ✓

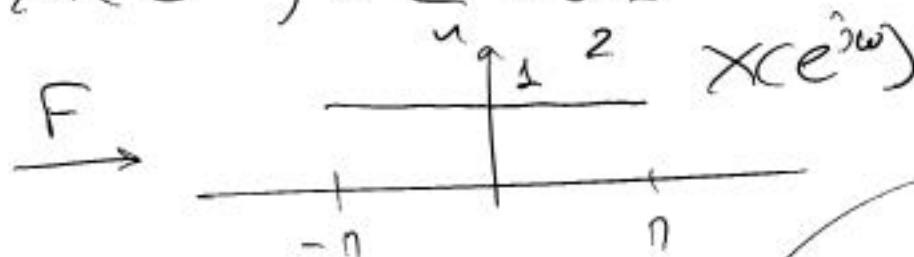
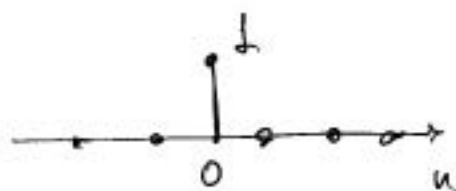
IIR Εύστ. ?

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n} \quad \text{Ευδης [2], Fourier}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{Αρξιστεροσ [2], Fourier}$$

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \quad \rightsquigarrow \quad \sum_n |x[n]| < \infty$$

$$\bullet \delta[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_n \delta[n] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$



$$\bullet \delta[n-n_0] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$$

$$|X(e^{j\omega})| = 1 \quad \angle X(e^{j\omega}) = -\omega n_0$$

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot e^{j0} \\ -1 &= 1 \cdot e^{j\pi} \end{aligned}$$

$$x[n] = a^n u[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{-j\omega})^n =$$

$$|a \cdot e^{-j\omega}| < 1 \Rightarrow |a| < 1$$

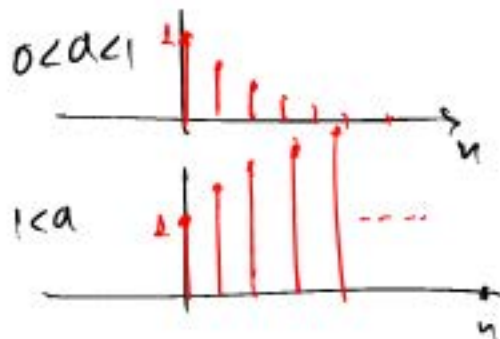
$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a \cos \omega + j a \sin \omega}$$

$$e^{-j\omega} = \cos \omega - j \sin \omega$$

$$= \frac{1 - a \cos \omega - j a \sin \omega}{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2} = \frac{1 - a \cos \omega - j a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} =$$

$$= \underbrace{\frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}_{R_x(e^{j\omega})} + j \underbrace{\frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}_{I_x(e^{j\omega})} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = R_x(e^{j\omega}) + j I_x(e^{j\omega})$$

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{R_x^2(e^{j\omega}) + I_x^2(e^{j\omega})}, \angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{I_x(e^{j\omega})}{R_x(e^{j\omega})}$$



$$\left. \begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= X_R(e^{-j\omega}) & \text{άρτια} \\ X_I(e^{j\omega}) &= -X_I(e^{-j\omega}) & \text{περιττή} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases} \quad \text{για σίφρα} \\ \text{πραγματικό.}$$

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$X[n] = X_a[n] + X_n[n] \quad \begin{cases} X_a[n] = \frac{X[n] + X[-n]}{2} \\ X_n[n] = \frac{X[n] - X[-n]}{2} \end{cases}$$

$$X_a[n] \rightarrow \frac{1}{2} (X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})) = \frac{1}{2} \cdot 2 X_R(e^{j\omega}) \Rightarrow X_a[n] \xleftrightarrow{F} X_R(e^{j\omega})$$

$$X[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}), \quad X[-n] \rightsquigarrow \sum_n X[-n] e^{-j\omega n} = \sum_n X[n] e^{j\omega n} = X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

$$\hookrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_n X[n] \cdot e^{-j\omega n} = X_R(e^{j\omega}) + X_I(e^{j\omega})$$

Σιδιζεντις  $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ ,  $y[n] \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$

1.  $\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{F} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega})$

2.  $x[n-n_0] \xrightarrow{F} \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_n x[n-n_0] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n'} x[n'] \cdot e^{-j\omega n'} \cdot e^{-j\omega n_0} =$

$= e^{-j\omega n_0} \cdot \underbrace{\sum_{n'} x[n'] \cdot e^{-j\omega n'}}_{X(e^{j\omega})} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

$x[n+n_0] \rightarrow e^{+j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

3.  $x[-n] \rightarrow X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$  για πραγματική αλυσή

4.  $e^{j\omega_0 n} \cdot x[n] \rightarrow \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] \cdot e^{j\omega_0 n} \cdot e^{-j\omega n} =$

$= \sum_n x[n] \cdot e^{-j(\omega-\omega_0)n} =$

$= X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

$$5) \quad n x[n] \xrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \quad \left| \quad X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n} \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_n x[n] -jn e^{-j\omega n} =$$

$$= j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_n n x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

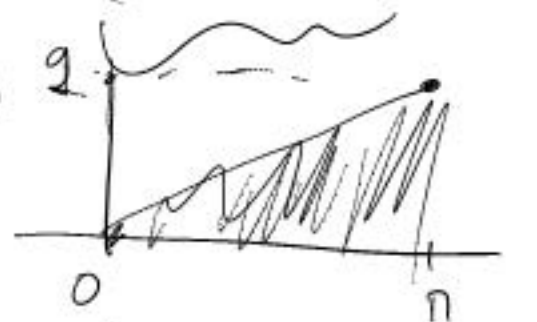
$$6) \quad x[n] - x[n-1] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) =$$

$$(1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$\downarrow$$

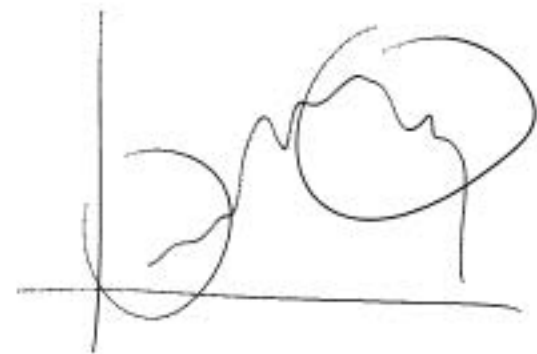
$$x[n] * (\delta[n] - \delta[n-1])$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{h[n]}$



$$\downarrow$$

$$X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$



$$7. \quad x[n] * h[n] = y[n] = \sum_k h[k] x[n-k]$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow Y(e^{j\omega}) &= \sum_n y[n] e^{-j\omega n} = \sum_n \sum_k h[k] x[n-k] \cdot e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_k h[k] \cdot \underbrace{\sum_n x[n-k] \cdot e^{-j\omega n}}_{e^{-j\omega k} \cdot X(e^{j\omega})} = X(e^{j\omega}) \cdot \underbrace{\sum_k h[k] \cdot e^{j\omega k}}_{H(e^{j\omega})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = x[n] * h[n] \rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})}$$

$$8. \quad x[n] \cdot h[n] \rightsquigarrow \sum_n x[n] \cdot h[n] \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \sum_n h[n] e^{j\theta n} \cdot e^{-j\omega n} d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \cdot e^{j\theta n} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \underbrace{\sum_n h[n] e^{-j(\omega-\theta)n}}_{H(e^{j(\omega-\theta)})} d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] \cdot h[n] \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})}$$



9.  $\sum_n |x[n]|^2 = \sum_n x[n] \cdot x^*[n] = \sum_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \cdot x^*[n] =$

$\uparrow$   
 Εξίσωση  
 στο  
 μέσο των χρόνων

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left( \sum_n x^*[n] \cdot e^{j\omega n} \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega}) d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Parseval

Αρχή διατήρησης της  
Εξίσωσης

10.  $\sum_n x[n] \cdot y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot Y^*(e^{j\omega}) d\omega$

$\langle x[n], y[n] \rangle$

$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt$

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \rightarrow h[n] = a^n u[n] \xrightarrow{F} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\downarrow$$

$$F\{y[n] - ay[n-1]\} = F\{x[n]\} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) - ae^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (1)$$

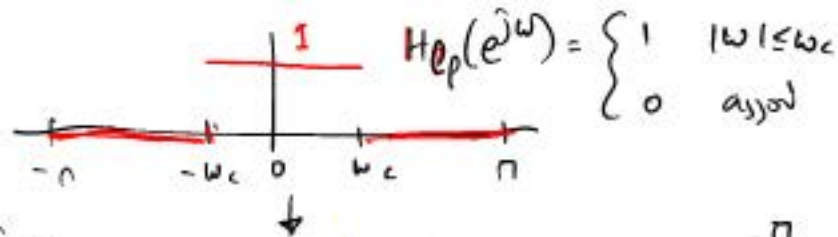
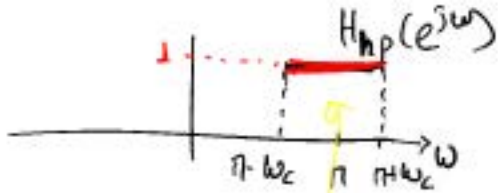
$$X[n] \rightarrow \boxed{\frac{h[n]}{F \times A}} \rightarrow y[n] = h[n] * x[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \xrightarrow{F^{-1}} h[n] = a^n u[n]$$

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] - \beta x[n-1] \rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \beta e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} - \beta \frac{e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} a^n u[n] - \beta a^{n-1} u[n-1] = h[n]$$



$$\left[ \delta[n] \right] \leftrightarrow 1 \quad \forall \omega$$

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

$$\hookrightarrow h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) =$$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

$$\rightarrow h_{hp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

# Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
  - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
  - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
  - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 7η: Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ιδιότητες». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy370>