ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διάλεξη 7η: Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου Ιδιότητες

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ 370

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

Γ.Χ.Α

$\downarrow \mathcal{F}$

φασματική απόκριση $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \longrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n} x[n] e^{-j\omega n}$

αιτ. $= \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$

$x[n] = e^{j\omega_0 n} \rightsquigarrow y[n] = H(e^{j\omega_0})\, x[n]$

ιδιοτιμή

ιδιοσυχνότητα

ιδιοσυνάρτηση

<u>Ξαφνική είσοδος.</u>

$x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] \rightsquigarrow y[n] = y_s[n] + y_t[n]$

$|y_t[n]| \to 0$ αν $\sum |h[n]| < \infty$ ευστ.

FIR ευστ. ✓

IIR ευστ ?

$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$ Ευθύς μετ. Fourier

$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ Αντίστροφος μετ. Four.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \rightsquigarrow \sum_{n} |x[n]| < \infty$$

- $\delta[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n} \delta[n] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 0} = 1$

$1 = 1 \cdot e^{j0}$

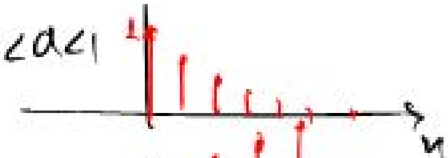
$-1 = 1 \cdot e^{j\pi}$

- $\delta[n-n_0] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$

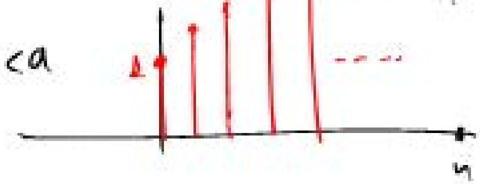
$|X(e^{j\omega})| = 1 \quad \measuredangle X(e^{j\omega}) = -\omega n_0$

$\cdot\ x[n] = a^n u[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\cdot e^{-j\omega})^n =$

$0<a<1$



$1<a$



$$|a\cdot e^{-j\omega}| < 1 \Rightarrow |a| < 1$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1-a\cos\omega + ja\sin\omega} =$$

$$e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$$

$$= \frac{1-a\cos\omega - ja\sin\omega}{(1-a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2} = \frac{1-a\cos\omega - ja\sin\omega}{1+a^2-2a\cos\omega} =$$

$$= \underbrace{\frac{1-a\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}}_{R_x(e^{j\omega})} + j\underbrace{\frac{-a\sin\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}}_{I_x(e^{j\omega})} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = R_x(e^{j\omega}) + jI_x(e^{j\omega})$$

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{R_x^2(e^{j\omega}) + I_x^2(e^{j\omega})}\ ,\quad \measuredangle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{I_x(e^{j\omega})}{R_x(e^{j\omega})}$$

$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ άρτια
$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ περιττή $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$$

για σήματα πραγματικά.

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$x[n] = x_a[n] + x_\pi(n)$$

$$x_a[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_\pi[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{}$$

$$x_a[n] \to \frac{1}{2}\left(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} X_R(e^{j\omega}) \; 2 \Rightarrow x_a[n] \xleftrightarrow{F} X_R(e^{j\omega})$$

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}), \quad x[-n] \rightsquigarrow \sum_n x[-n] e^{-j\omega n} = \sum_n x[n] e^{j\omega n} = X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

$$\hookrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n} = X_R(e^{j\omega}) + X_I(e^{j\omega})$$

Ιδιότητες $\quad x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}),\quad y[n] \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$

1. $a\,x[n] + \beta\,y[n] \xrightarrow{F} a X(e^{j\omega}) + \beta\, Y(e^{j\omega})$

2. $x[n-n_0] \xrightarrow{F} \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_n x[n-n_0]\cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n'} x[n'] e^{-j\omega n'} \cdot e^{-j\omega n_0} =$

$n' = n - n_0 \Rightarrow n = n' + n_0$

$$= e^{-j\omega n_0} \cdot \underbrace{\sum_{n'} x[n'] \cdot e^{-j\omega n'}} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$x[n+n_0] \longrightarrow e^{+j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

3. $x[-n] \longrightarrow X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ για πραγ. σήματα

4. $e^{j\omega_0 n}\cdot x[n] \longrightarrow \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]\cdot e^{j\omega_0 n} \cdot e^{-j\omega n} =$

$$= \sum_n x[n] \cdot e^{-j(\omega-\omega_0)n} =$$

$$= X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

5) $n x[n] \xrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_n x[n] \, (-jn) \, e^{-j\omega n} =$$

$$= j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_n n x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

6) $x[n] - x[n-1] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) =$

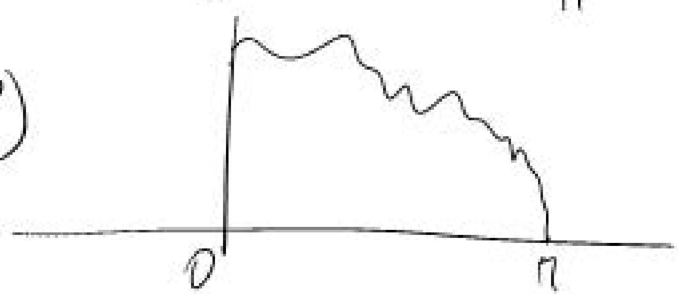
$$\underbrace{(1 - e^{-j\omega})} X(e^{j\omega})$$

$\downarrow$

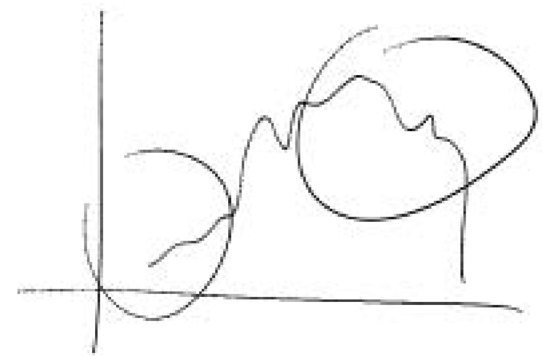
$$x[n] * \underbrace{(\delta[n] - \delta[n-1])}_{h[n]}$$

$\downarrow$

$$X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$



=



7. $x[n] * h[n] = y[n] = \sum_k h[k]\, x[n-k]$

$$\hookrightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_n y[n]\, e^{-j\omega n} = \sum_n \sum_k h[k]\, x[n-k] \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_k h[k] \cdot \underbrace{\sum_n x[n-k] \cdot e^{-j\omega n}}_{e^{-j\omega k} \cdot X(e^{j\omega})} = X(e^{j\omega}) \cdot \underbrace{\sum_k h[k] \cdot e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})}$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = x[n] * h[n] \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})}$$

8. $x[n] \cdot h[n] \rightsquigarrow \sum_n x[n] \cdot h[n] \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \sum_n h[n]\, e^{j\theta n} \cdot e^{-j\omega n} d\theta$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \cdot e^{j\theta n}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \underbrace{\sum_n h[n]\, e^{-j(\omega-\theta)n}}_{H(e^{j(\omega-\theta)})} d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] \cdot h[n] \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, H(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta = X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})}$$

9. $\sum_n |x[n]|^2 = \sum_n x[n]\cdot x^*[n] = \sum_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \cdot x^*[n] =$

Ενέργεια στο πεδίο του χρόνου

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\underbrace{\left(\sum_n x^*[n]\cdot e^{j\omega n}\right)}_{X^*(e^{j\omega})}\cdot d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cdot X^*(e^{j\omega})\, d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

Parseval

Αρχή διατήρησης της Ενέργειας

10. $\sum_n x[n]\cdot y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cdot Y^*(e^{j\omega})d\omega$

$\langle x[n], y[n]\rangle$

$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot y^*(t)\,dt$

$$y[n]-ay[n-1]=x[n] \rightsquigarrow h[n]=a^n u[n] \overset{F}{\rightsquigarrow} H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\downarrow$$

$$F\{y[n]-ay[n-1]\}=F\{x[n]\} \Rightarrow Y(e^{j\omega})-ae^{-j\omega}Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1}{1-ae^{j\omega}} \quad (1)$$

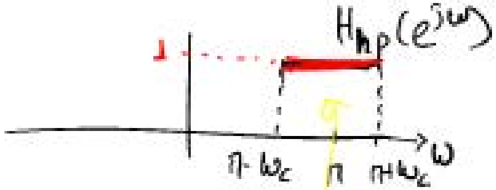
$$x[n] \longrightarrow \underset{\text{ΓΧΑ}}{\boxed{h[n]}} \longrightarrow y[n]=h[n]*x[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})\cdot X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

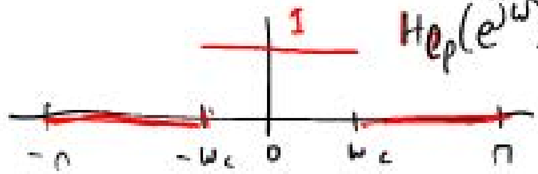
$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \xrightarrow{F^{-1}} h[n]=a^n u[n]$$

$$y[n]-ay[n-1]=x[n]-\beta x[n-1] \rightsquigarrow H(e^{j\omega})=\frac{1-\beta e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}-\beta\frac{e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} a^n u[n]-\beta a^{(n-1)}u[n-1]=h[n]$$

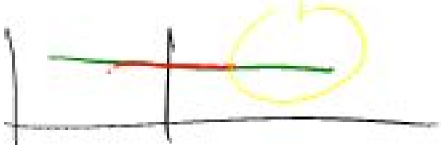




$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\boxed{\delta[n] \longrightarrow 1 \quad \forall \omega}$$

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$



$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi j n} \cdot \left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n} \right) =$$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 7η: Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ιδιότητες». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://www.csd.uoc.gr/~hy370