



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διάλεξη 10η: Μετασχηματισμός Z  
Ιδιότητες

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 370

Μετ. Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$z = r e^{j\omega}$

ROC

$$\sum_n |x[n]| < \infty$$

1) Δεξιόστροφα :  $x[n] = a^n u[n] \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}$  ,  $|z| > |a|$   $R_1$

2) Αριστό :  $x[n] = -\beta^n u[-n-1] \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-\beta}$  ,  $|z| < |\beta|$   $R_2$

3) Αμφίστροφα :  $x[n] = a^n u[n] - \beta^n u[-n-1] \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-\beta}$

ROC:

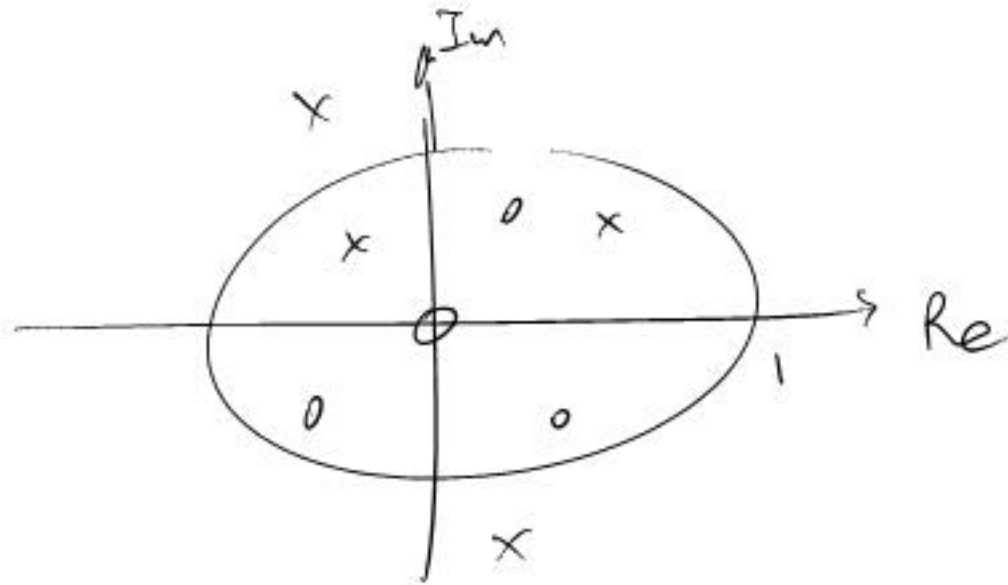
$a < \beta$

$|a| < |z| < |\beta|$

ΜONO AN

$R_1 \cap R_2$  δέν είναι κενό

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \rightarrow \begin{array}{l} \text{μνδενικά } 0 \\ \text{πόροι } x \end{array}$$



Αναγ. πόροι & μνδενικά

$$\begin{array}{l} \delta[n] \xrightarrow{Z} 1 \quad \forall z \\ \delta[n-n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0} \end{array}$$


$$\begin{aligned}
 x[n] &\xleftrightarrow{Z} X(z) & R_x \\
 x_1[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z) & R_{x_1} \\
 x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_2(z) & R_{x_2}
 \end{aligned}$$

1) Граф.  $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \Rightarrow X(z) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$

$$R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

2)  $x[n-n_0] \rightsquigarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] z^{-n} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] z^{-n'} \cdot z^{-n_0} =$

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad n' = n - n_0 \\
 & \quad \quad \quad n = n' + n_0 \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 R_x & = z^{-n_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = z^{-n_0} \cdot X(z)
 \end{aligned}$$



Zustuf-arm

$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = H(z)$$

$$3) \quad x[n] * h[n] = y[n] = \sum_k x[k] h[n-k]$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] z^{-n}}_{z^{-k} H(z)} =$$

$$= H(z) \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}}_{X(z)} = X(z) \cdot H(z)$$

$$R_Y = R_X \cap R_H$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$4) \mathcal{Z}\{n x[n]\} \quad X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = \sum_n -n x[n] z^{-n-1} =$$

$$= -z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_n n x[n] z^{-n}$$

$z$   
 $\downarrow$

$$-z \frac{dX(z)}{dz}$$

$\mathcal{R}_x$

$$X(z) = \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})} \Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = \frac{\cdot}{(1 - d_k z^{-1})^2}$$

$$5) Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] z^{n'} =$$

$$= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] z^{n'} = X(z^{-1})$$

$$\tilde{R}_x = \frac{1}{R_x}$$

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n}$$



$$b) \quad z_0^n x[n] \longleftrightarrow Z \{ z_0^n x[n] \} = \sum_n x[n] \cdot z_0^n \cdot z^{-n} =$$

$$\left( e^{j\omega_0 n} \cdot x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \right) = \sum_n x(z) \cdot \left( \frac{z}{z_0} \right)^{-n} =$$

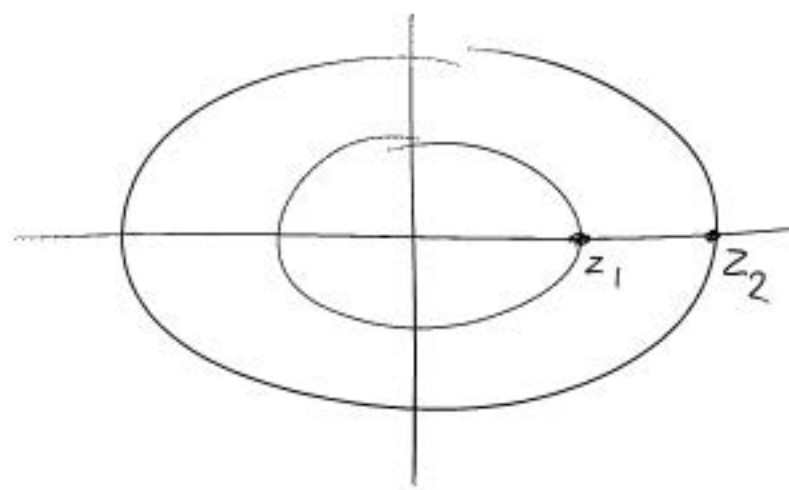
$$R_x: z_1 < |z| < z_2 \quad = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$$z_1 < \left| \frac{z}{z_0} \right| < z_2 \Rightarrow \text{ROC: } |z_0| \cdot R_x$$

$$\Rightarrow |z_0| \cdot z_1 < |z| < |z_0| \cdot z_2 \quad z_0 R_x$$



$$re^{j\theta} \cdot e^{j\alpha} = re^{j(\alpha+\theta)}$$

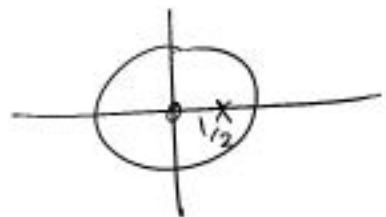


$$z_1 < \frac{|z|}{|z_0|^n} < z_2 \Rightarrow |z_0|^n z_1 < |z| < |z_0|^n z_2$$

a)  $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$

$|z| > \frac{1}{2} \xrightarrow{z^{-1}} x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Ευσταθής



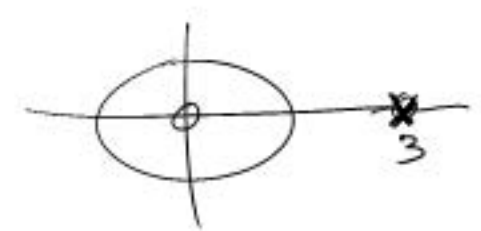
$\rightarrow X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$

$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{z}{z - a_k} \xrightarrow{z^{-1}} \sum_{k=1}^N a_k^n u[n]$

$|a_k| < 1 \forall k$   
 $|z| > \max_k \{ |a_k| \}$

β)  $X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}}$

$|z| > 3 \xrightarrow{z^{-1}} x[n] = (3)^n u[n]$



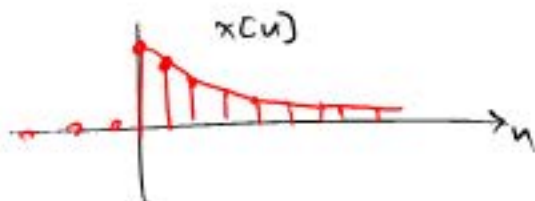
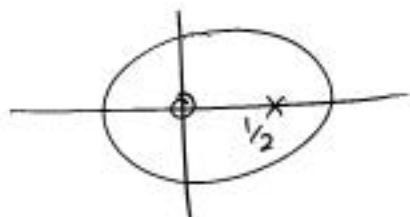
$(|a_k| > 1 \rightarrow x[n] = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k'}}^N a_k^n u[n] + a_{k'}^n u[n]$

$\rightarrow$  ασταθής

ασταθής

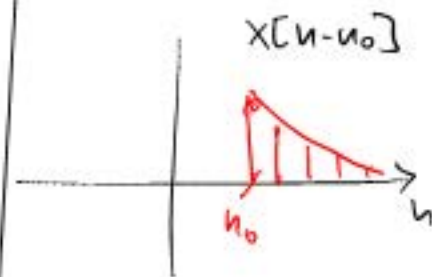
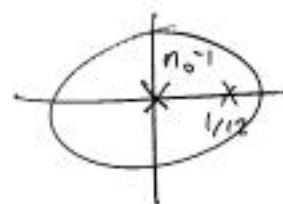
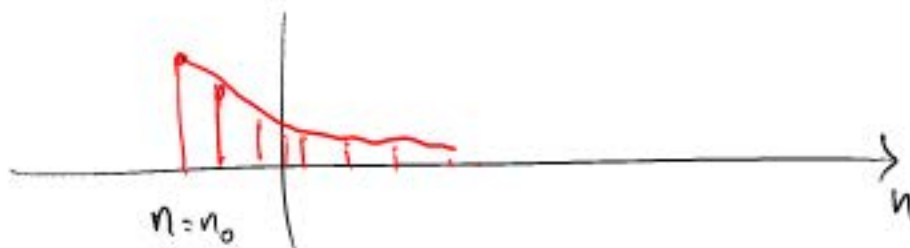
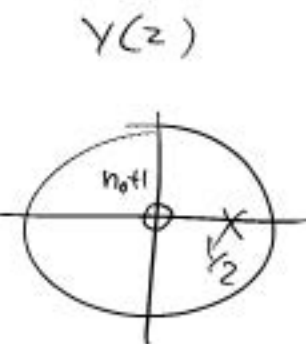
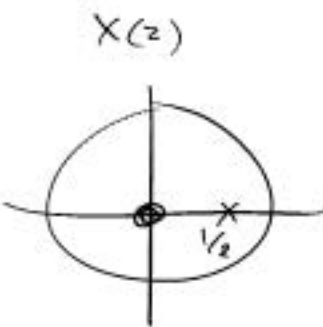
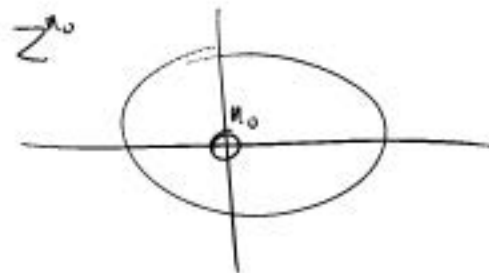
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$|z| > \frac{1}{2} \Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$



$$z^{n_0} X(z) = Y(z) \xrightarrow{z^{-1}} Y[n] = x[n] * \delta[n+n_0] = x[n+n_0]$$

$z^{n_0} \downarrow$        $\downarrow z^{-1}$   
 $\delta[n+n_0]$        $x[n]$



$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^{-M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^{-N} \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} a_0, a_N \neq 0 \\ N \text{ p.u. p.u.} \end{array} \right.$

$$= \frac{1}{z^{M-N}} \cdot \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}$$

max{M, N}

$b_0, b_N \neq 0$

a)  $M > N$        $\frac{1}{z^{M-N}}$        $\frac{M \text{ p.u.}}{N \text{ p.u.}}$        $\rightsquigarrow$

B)  $M < N$        $z^{N-M}$        $\frac{M \text{ p.u.}}{N \text{ p.u.}}$

$d_k, c_k \neq 0.$

→

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + \sum_{k=1}^M \overset{c_k}{b_k/b_0} z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \underset{d_k}{a_k/a_0} z^{-k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

Αν  $d_k$  είναι διακριτά  $\Rightarrow X(z) = \frac{b_0}{a_0} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{b_0}{a_0} \sum_{k=1}^N A_k \cdot (d_k)^n u[n]$$

$$|z| > \max_k \{|d_k|\} \Rightarrow \text{σέλιος πεδίο σύγκλισης.}$$

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N d_k z^{-k}} = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N-S} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^S \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

$$= \frac{b_0}{d_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

$M-N$   
 $B_r$   
 $A_k$   
 $C_m$   
 $k \neq i$   
 Πόλος  
 ο πόλος  $d_i$  έχει πολλαπλότητα  $S$

▷  $B_r$  διαίρεση ποσομωρίων.

▷  $A_k, C_m$   $(s-m)$  παράγωγο

$$C_m = \frac{1}{(s-m)! (-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{(s-m)}}{dz^{-1 (s-m)}} [(1 - d_i z^{-1})^s X(z)] \right\}_{z=d_i}$$

$$A_i = \lim_{z \rightarrow d_i} (1 - d_i z^{-1}) X(z)$$

# Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
  - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
  - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
  - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 10η: Μετασχηματισμός Z - Ιδιότητες». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy370>