



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

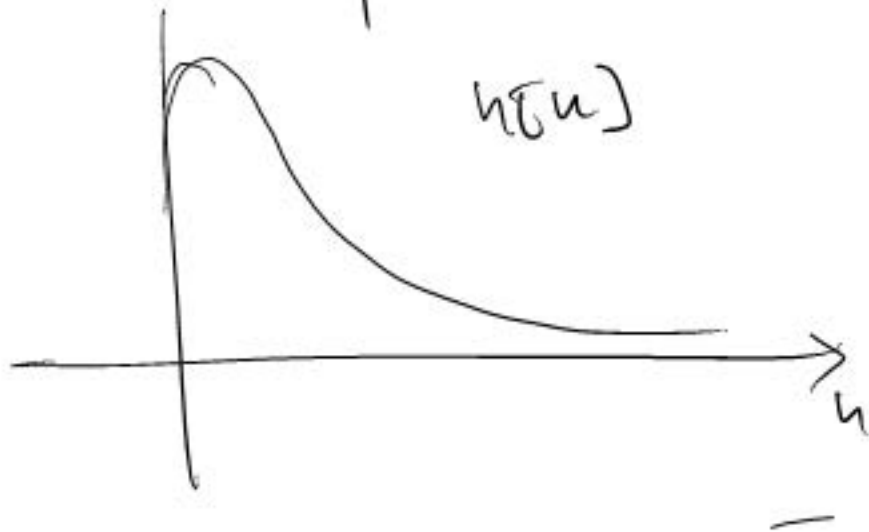
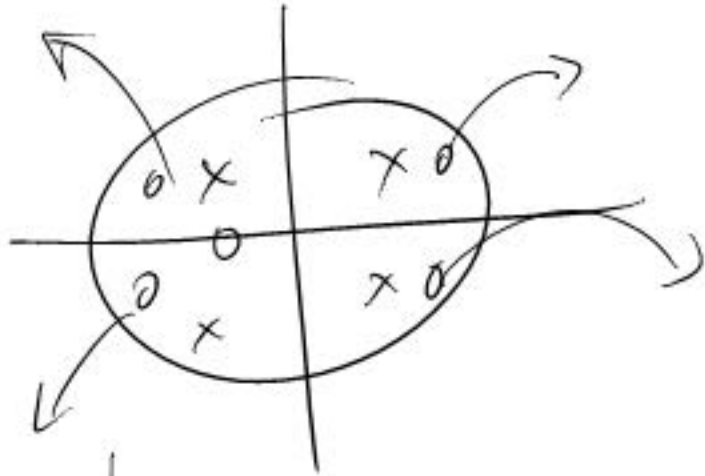
Διάλεξη 15η: Συστήματα Γραμμικής Φάσης

Ιωάννης Στυλιανού

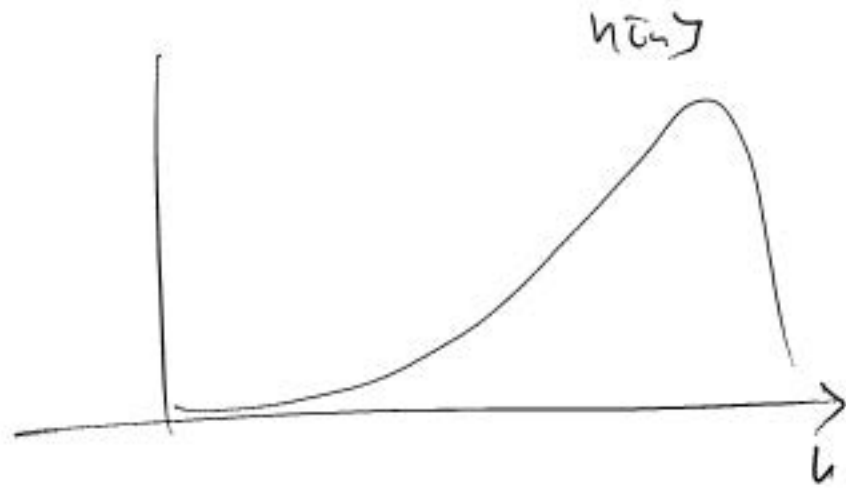
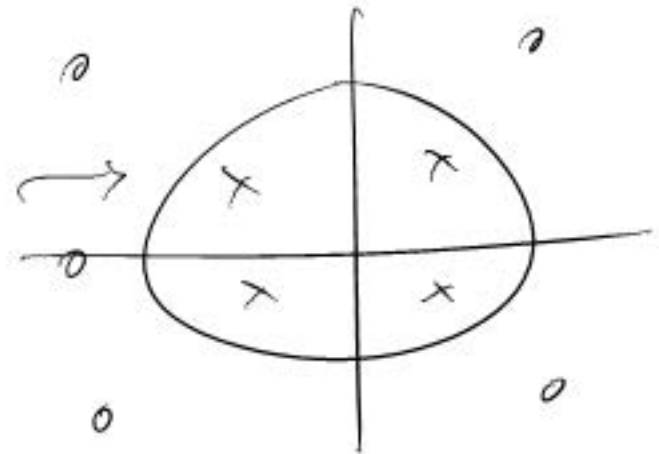
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 370

Minimum Phase

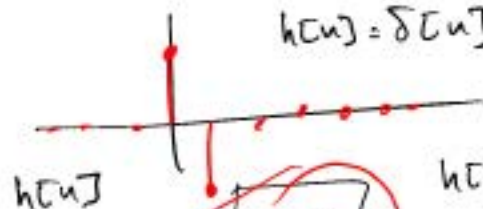


Maximum Phase



FIR Finite Impulse Response

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \rightsquigarrow y[n] = x[n] - x[n-1]$$



$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

$$= h[0] + h[1] \cdot e^{-j\omega} + h[2] e^{j\omega 2} + h[3] \cdot e^{-j\omega 3} + h[4] \cdot e^{j\omega 4} =$$

$$= e^{-j\omega 2} \cdot (h[0] \cdot e^{j\omega 2} + h[1] e^{j\omega 1} + h[2] + h[3] e^{-j\omega 1} + h[4] e^{-j\omega 2}) =$$

$$= e^{-j\omega 2} \cdot (2h[0] \cos(2\omega) + 2h[1] \cos(\omega) + h[2])$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left[h[M/2] \cos(\omega \cdot 0) + 2h[\frac{M}{2}-1] \cos(\omega) + 2h[\frac{M}{2}-2] \cos(2\omega) + \dots + 2h[0] \cos(\frac{M}{2}\omega) \right]$$

$$A_n \quad a[k] = h[M/2 - k]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \cdot \sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cos(k\omega)$$

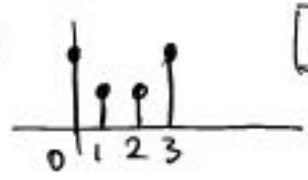
Type I
FIR

πραγμ. συμμετρική
ζου ω

← γειτονισμός

2

Type II FIR



M=3 REATTD

$$h[M-n] = h[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left\{ \sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k] \cos[\omega(k-\frac{1}{2})] \right\}$$

όπου $b[k] = 2h[\frac{M+1}{2} - k], k=1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^M h[M-n] z^{-n} = \sum_{n'=0}^M h[n'] \cdot z^{-M} z^{n'} =$$

$h[n] = h[M-n]$

$n' = M-n$
 $n = M-n'$

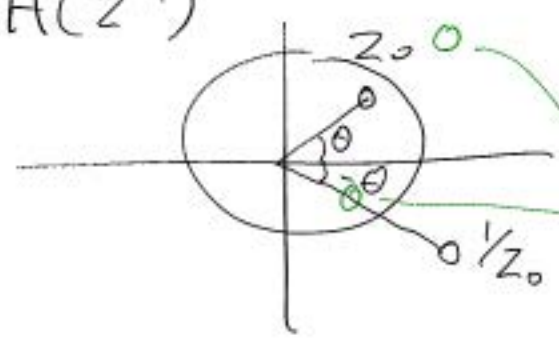
$$= z^{-M} \sum_{n=0}^M h[n] z^n \Rightarrow H(z) = z^{-M} \cdot H(z^{-1})$$

$H(z) = z^{-M} \cdot H(z^{-1})$

$z_0 : H(z_0) = 0 \Rightarrow H(1/z_0) = 0$

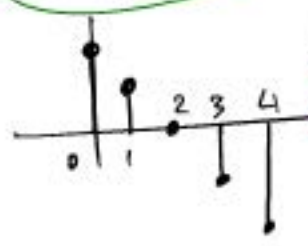
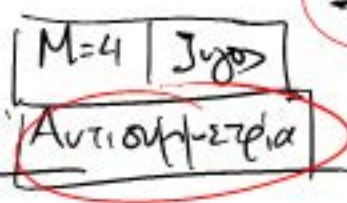
$z_0 = r \cdot e^{j\theta}$

$1/z_0 = \frac{1}{r \cdot e^{j\theta}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-j\theta}$



Διότι έχουμε
πραγματική
μοναδ. απόκριση, $h[n]$

Type III

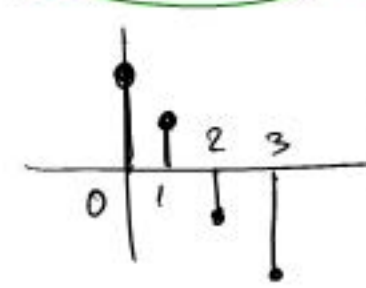
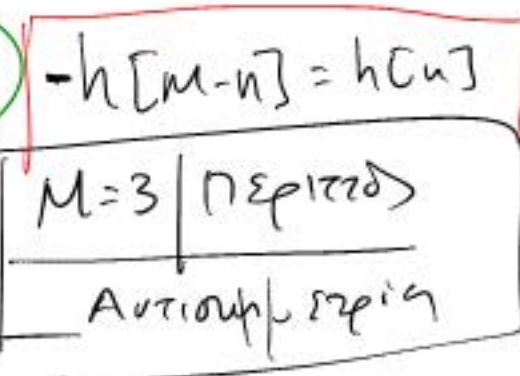


$-h[M-n] = h[n]$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega \frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})} \left\{ \sum_{k=1}^{M/2} c[k] \sin(\omega k) \right\}$$

όπου $c[k] = 2h[M/2 - k]$, $k = 1, 2, \dots, M/2$

Type IV



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega \frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})} \left\{ \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k] \sin(\omega(k - \frac{1}{2})) \right\}$$

όπου $d[k] = 2h[(M+1)/2 - k]$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n] z^{-n} \Rightarrow H(z) = -(z^{-M}) H(z^{-1})$$

$-h[M-n] = h[n]$

Type I, II : $H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$

Type III, IV : $H(z) = -z^{-M} H(z^{-1})$

$z_0 = 1$

$H(1) = 1^{-M} H(1) \Rightarrow H(1) = H(1)$ ταυτότητα

$z_0 = -1$

$H(-1) = (-1)^{-M} H(-1) \Rightarrow$

a) M άρτιος : $H(-1) = H(-1)$ ταυτότητα

b) M περιττός : $H(-1) = -H(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow H(-1) + H(-1) = 0 \Rightarrow$

$2H(-1) = 0 \Rightarrow \boxed{H(-1) = 0}$

υποχρεωτικά Type II $z_0 = -1$

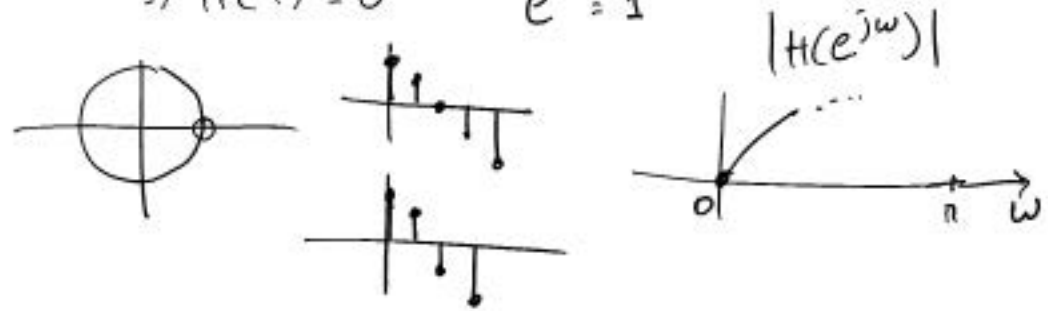


$e^{j\omega} = -1$
 $|H(e^{j\omega})|$



Type III & IV : $H(z) = -z^{-M} H(z^{-1})$

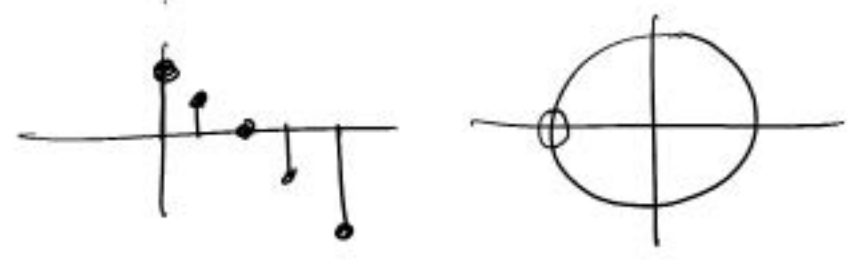
• $z_0 = 1$ $H(1) = -1^{(-M)} H(1) \Rightarrow H(1) = -H(1) \Rightarrow 2H(1) = 0 \Rightarrow H(1) = 0$
 $\Rightarrow H(1) = 0$ $e^{j0} = 1$



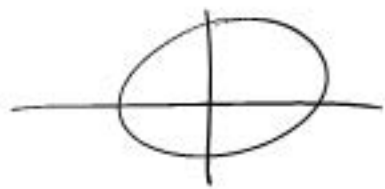
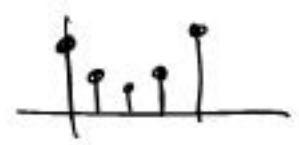
• $z_0 = -1$

$H(-1) = -(-1)^{-M} H(-1) = (-1)^{-M+1} H(-1)$

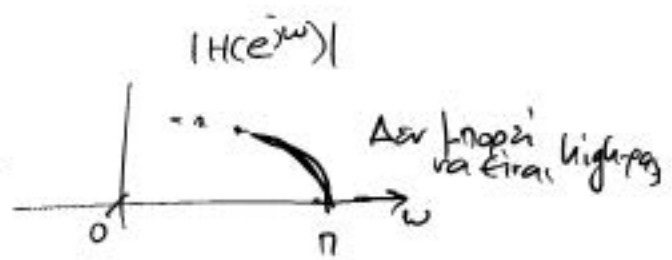
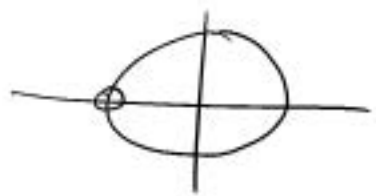
- M άρτιος $\Rightarrow -M+1$ περιττός.
 Type III $H(-1) = -H(-1) \Rightarrow 2H(-1) = 0 \Rightarrow H(-1) = 0$
- M περιττός $\Rightarrow -M+1$ άρτιος $\Rightarrow H(-1) = H(-1)$ ταυτοζώντα



Type I

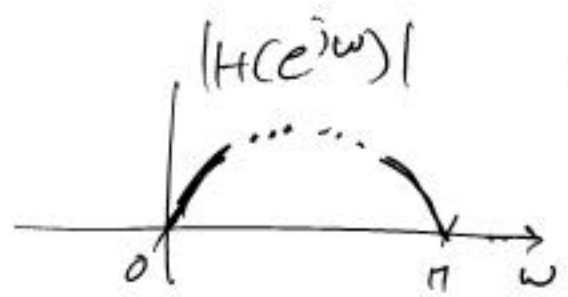
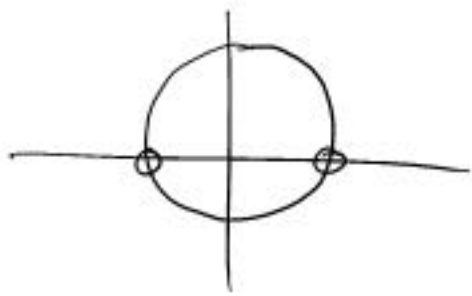


Type II



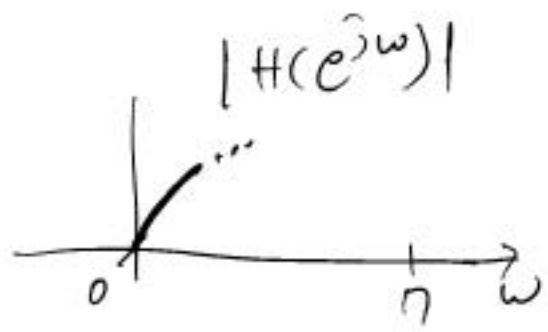
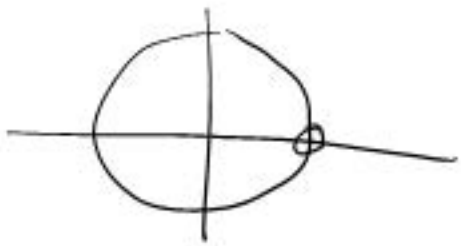
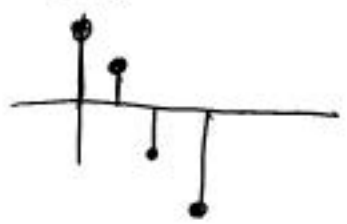
Kajo low-pass

Type III



Kajo band-pass

Type IV



Kajo high-pass

FIR

$$H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{uc}(z) \cdot H_{\max}(z)$$

Γραφικώς Φάσους

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_i/2} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{unit} \\ \text{circle}}}{\prod_{k=1}^{M_{uc}/2}} (1 - e^{j\theta_k} z^{-1})(1 - e^{-j\theta_k} z^{-1}) \cdot \prod_{k=1}^{M_i/2} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*)$$

M_i : ποσότητα ζυθων κωθ ζυθω στο μοναδικο κωθ
 $|c_k| < 1$

$$\begin{aligned} H_{\max}(z) &= \prod_{k=1}^{M_i/2} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*) = \prod_{k=1}^{M_i/2} z^{-2} (1 - c_k z)(1 - c_k^* z) = \\ &= z^{-M_i} \underbrace{\prod_{k=1}^{M_i/2} (1 - c_k z)(1 - c_k^* z)}_{H_{\min}(z^{-1})} \Rightarrow \end{aligned}$$

\Rightarrow $H_{\max}(z) = z^{-M_i} H_{\min}(z^{-1})$ *

$$H(z) = \underbrace{(1 - 0.9 e^{j0.6n} z^{-1})(1 - 0.9 e^{-j0.6n} z^{-1})}_{\text{opos 1}} \underbrace{(1 - 1.25 e^{j0.8n} z^{-1})(1 - 1.25 e^{-j0.8n} z^{-1})}_{\text{opos 2}}$$

$$H(z) = \text{opos 1} \cdot (-1.25 \cdot e^{j0.8n}) (-1.25 \cdot e^{-j0.8n}) \\ (z^{-1} - 0.8 e^{-j0.8n}) (z^{-1} - 0.8 e^{+j0.8n}) =$$

$$= \text{opos 1} \cdot (1.25)^2 (z^{-1} - 0.8 e^{-j0.8n}) (z^{-1} - 0.8 e^{+j0.8n})$$

$$\underline{H_{\min}(z)} = (1.25)^2 \cdot \text{opos 1} \cdot (1 - 0.8 e^{-j0.8n} z^{-1}) (1 - 0.8 e^{+j0.8n} z^{-1})$$

$$H(z) = (\text{opos 2}) \cdot (-0.9 e^{j0.6n}) (0.9 e^{-j0.6n})$$

$$(z^{-1} - 1.11 e^{-j0.6n}) (z^{-1} - 1.11 e^{+j0.6n})$$

$$= (\text{opos 2}) \cdot (0.9)^2 (z^{-1} - 1.11 e^{-j0.6n}) (z^{-1} - 1.11 e^{+j0.6n})$$

$$\underline{H_{\max}(z)} = (0.9)^2 \cdot (\text{opos 2}) (1 - 1.11 e^{-j0.6n} z^{-1}) (1 - 1.11 e^{+j0.6n} z^{-1})$$

$$H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\max}(z)$$

$$H_{\max}(z) = (z^{-1} - 0.8 \cdot e^{-j0.8n}) (z^{-1} - 0.8 e^{+j0.8n}) =$$

$$= z^{-2} (1 - 0.8 e^{-j0.8n} z) (1 - 0.8 e^{+j0.8n} z)$$

$$H_{\max}(z) = \underbrace{z^{-M_i}} \cdot H_{\min}(z^{-1})$$

$$M_i = 2$$

$$\Rightarrow H_{\min}(z) = (1 - 0.8 e^{-j0.8} z^{-1}) (1 - 0.8 e^{+j0.8n} z^{-1})$$

Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 15η: Συστήματα Γραμμικής Φάσης». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy370>