



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διάλεξη 17η: Δομές Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

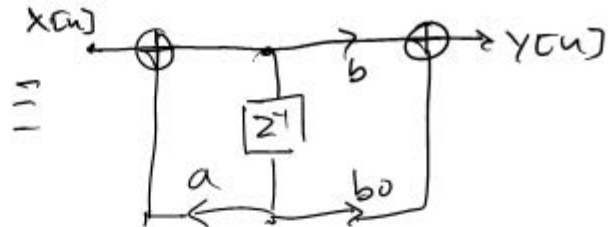
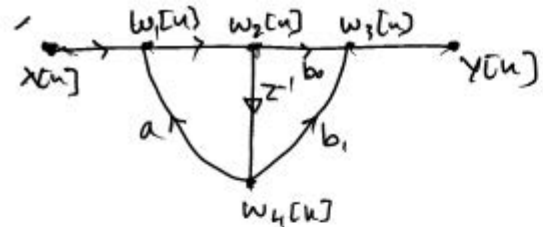
# HY 370

Δοφδ / φίλτρων  
συστημάτων

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$\boxed{z^{-1}}$$

~~$z^{-1}$~~



$$\begin{aligned}
 1. w_1[n] &= a w_4[n] + x[n] \\
 2. w_2[n] &= w_1[n] \\
 3. w_3[n] &= b_0 w_2[n] + b_1 w_4[n] \\
 4. w_4[n] &= w_2[n-1] \\
 5. y[n] &= w_3[n]
 \end{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 w_4[0] &= 0 \\
 w_2[-1] &= 0
 \end{aligned} \right\} w_2[n] = a w_4[n] + x[n] \Rightarrow w_2[n] = a w_2[n-1] + x[n] \xrightarrow{Z} W_2(z) = \frac{X(z)}{1 - a z^{-1}}$$

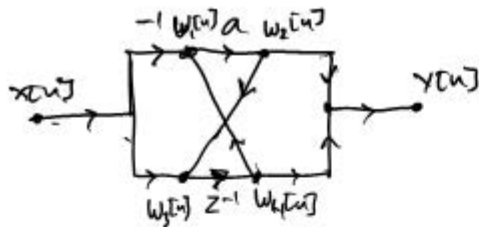
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y[n] = b_0 w_2[n] + b_1 w_2[n-1] \rightarrow Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1}) W_2(z)$$

$$\begin{aligned}
 1. w_1(z) &= a w_4(z) + X(z) \\
 2. w_2(z) &= w_1(z) \\
 3. w_3(z) &= b_0 w_2(z) + b_1 w_4(z) \\
 4. w_4(z) &= z^{-1} w_2(z) \\
 5. Y(z) &= w_3(z)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}} X(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$$



$$H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} h[n] = a^{n-1} u[n-1] - a^{n+1} u[n+1]$$

$a < 1, |z| > |a|$

$$\begin{aligned} w_1[n] &= w_4[n] - x[n] \\ w_2[n] &= a w_1[n] \\ w_3[n] &= w_2[n] + x[n] \\ w_4[n] &= w_3[n-1] \\ y[n] &= w_2[n] + w_4[n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(z) &= w_4(z) - X(z) \\ w_2(z) &= a w_1(z) \\ w_3(z) &= w_2(z) + X(z) \\ w_4(z) &= z^{-1} w_3(z) \\ y(z) &= w_2(z) + w_4(z) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} w_2(z) &= a(w_4(z) - X(z)) \\ w_4(z) &= z^{-1}(w_2(z) + X(z)) \end{aligned} \right\}$$

$$w_2(z) - a z^{-1} w_2(z) = (a z^{-1} - a) X(z) \Rightarrow w_2(z) = \frac{a z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}} X(z) \quad \textcircled{1}$$

$$w_4(z) = X(z) + \frac{1}{a} w_2(z) \Rightarrow w_4(z) = X(z) + \frac{z^{-1} - 1}{1 - a z^{-1}} X(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_4(z) = \frac{1 - a z^{-1} + z^{-1} - 1}{1 - a z^{-1}} X(z) = \frac{z^{-1} - a z^{-1}}{1 - a z^{-1}} X(z) \quad \textcircled{2}$$

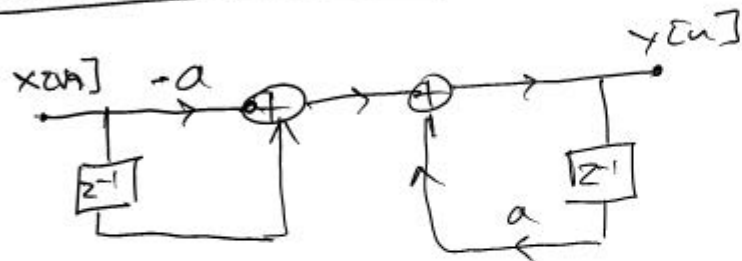
$$y(z) = \left( \frac{a z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}} + \frac{z^{-1} - a z^{-1}}{1 - a z^{-1}} \right) X(z) \Rightarrow y(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}} X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}}$$

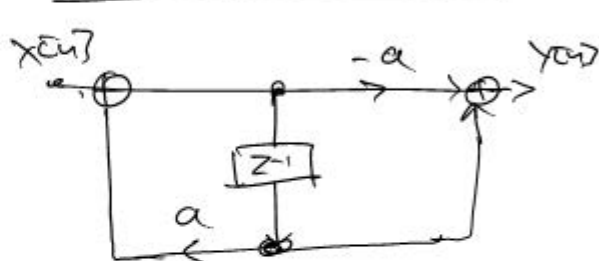
$$H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) - aY(z)z^{-1} = X(z)z^{-1} - aX(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y[n] = aY[n-1] + X[n-1] - aX[n]$$

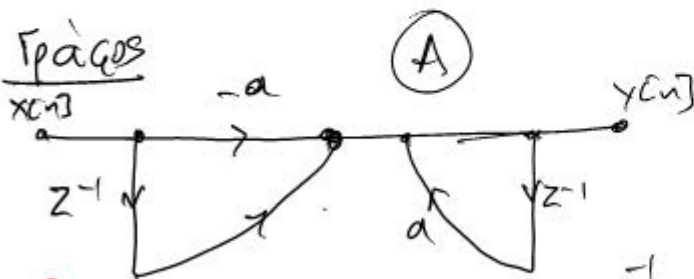
Direct Form I :



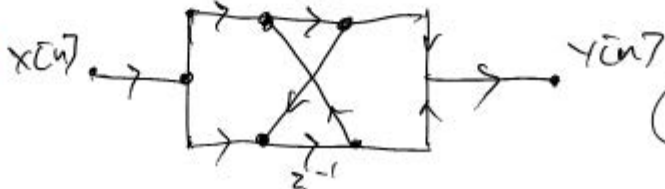
Direct Form II :



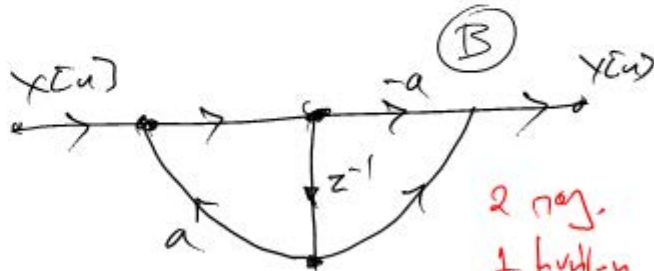
Tragos



2 nos.  
2 mult's



2 nos.  
1 mult's



2 nos.  
2 mult's

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - e_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - f_k z^{-1})(1 - f_k^* z^{-1})} = \left( \prod_{k=1}^{N_s} \right) \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad M = M_1 + 2M_2 \\ \Rightarrow N = N_1 + 2N_2 \end{array} \right\} N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$$

Cascade

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3} - a_4 z^{-4}} = \frac{(b_{01} + b_{11} z^{-1} + b_{12} z^{-2})(b_{02} + b_{12} z^{-1} + b_{22} z^{-2})}{(1 - a_{11} z^{-1} - a_{21} z^{-2})(1 - a_{12} z^{-1} - a_{22} z^{-2})}$$



Οχι κανη  
για fixed  
point operations

Fixed point  
operations

περιοριστος  
σαν αριθμ  
2w bits

Για fixed  
point

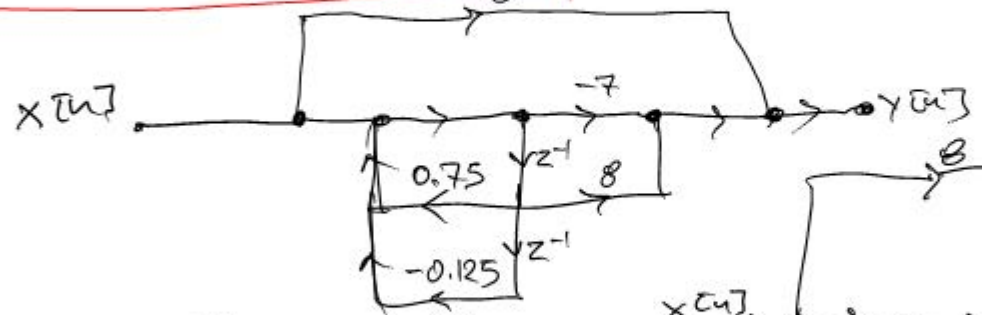
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (M > N)$$

$$\sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_S} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

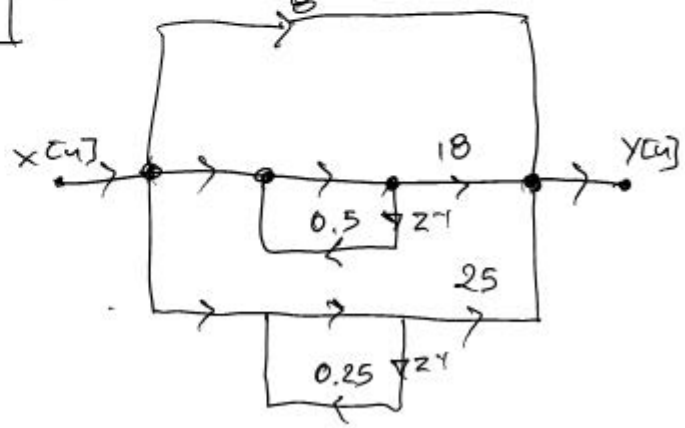
Α  
 Παράλληλη σύνδεση

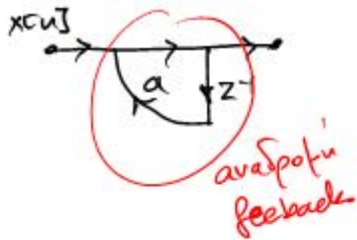
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = 8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

$$8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$



$$H(z) = 8 + \frac{18}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{25}{1 - 0.25z^{-1}}$$

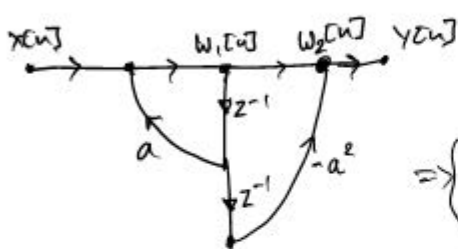




$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

$$a < 1 \quad |z| > a$$

$$h[n] = \underbrace{a^n u[n]}_{\text{FIR}}$$



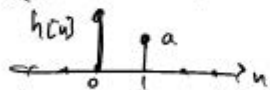
$$w_1[n] = aw_1[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = w_1[n] - a^2 w_1[n-2]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_1(z) = \frac{X(z)}{1 - az^{-1}} \\ Y(z) = (1 - a^2 z^{-2}) W_1(z) \end{cases}$$

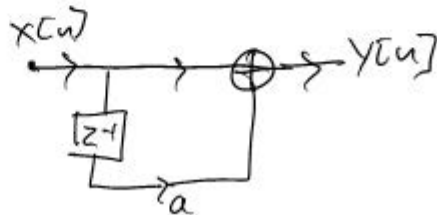
$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1 - a^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1 - az^{-1})(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})}$$

$$\Rightarrow H(z) = 1 + az^{-1} \Rightarrow h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1]$$



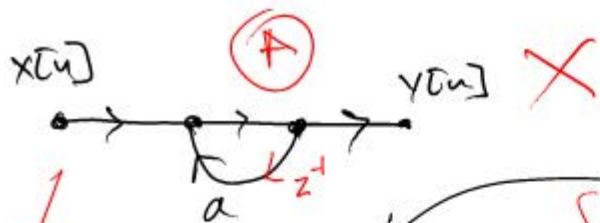
FIR

$$y[n] = x[n] + ax[n-1]$$



H avadporin  
AEN  
ovhavin anapainica  
FIR





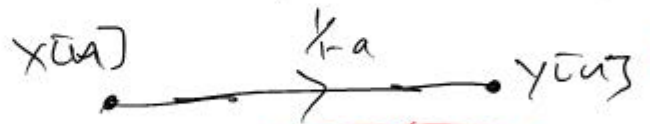
$$y[n] = a y[n-1] + x[n] \Rightarrow$$

$$y[n] = \frac{1}{1-a} x[n]$$

$\beta$

$$y[n] = \beta x[n]$$

$\beta$



$$A \neq \beta$$

Δεν μπορεί να παραβληθεί

Αναδοφές με καθυστέρηση  $(z^{-1})$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{παραγωγή} \\ \text{σειρά} \end{array} \right.$$

- Direct form I
- Direct form II

?

Γράφους



• Πρώτα τους αριθμούς  
και μετά  
τα συντελεστές  
εξαρτησιο σε συνάρτηση

# Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
  - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
  - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
  - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 17η: Δομές Συστημάτων Διακριτού Χρόνου». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy370>