



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διάλεξη 19η: Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ 370

Τυχεδισιον κυβικων
βιβλων.

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



Χρόνος

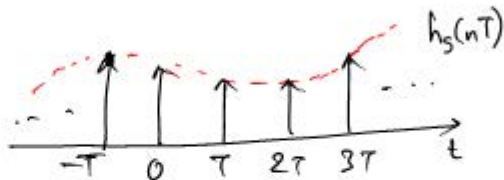
$h(t)$



$$h_s(nT) = h(t) \cdot \delta_T(t) =$$

$$= h(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \cdot \delta(t - nT)$$



$$h(t) \xrightarrow{F} H(j\omega)$$

$$\delta_T(t) \xrightarrow{F} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

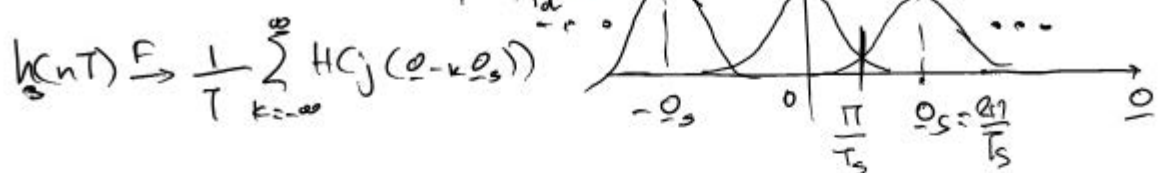
$$\left. \begin{aligned} \omega_s &= \frac{2\pi}{T} \\ f_s &= \frac{1}{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s$$

$$h_s(nT) \xrightarrow{F} \frac{1}{T} \left[H(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j(\omega - k\omega_s))$$

Συχνότητα

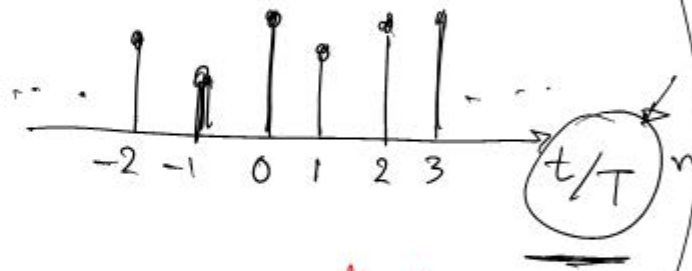
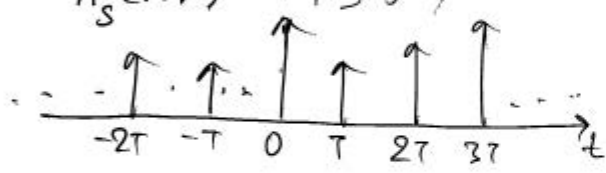
$$\left\{ \begin{aligned} f: \delta_T(t) &\xrightarrow{F} \frac{1}{T} \dots \\ \omega = 2\pi f: \delta_T(t) &\xrightarrow{F} \frac{2\pi}{T} \dots \end{aligned} \right.$$

αντίστροφο
ω
H(jω)
HE διαστήτ ω_s

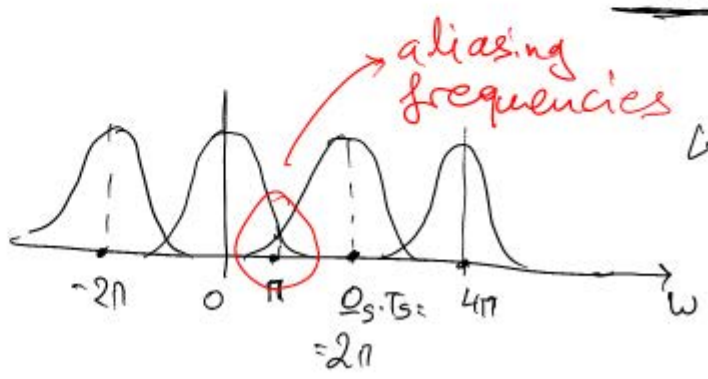


$T_s = T_d$

$h_s(nT) \rightarrow H_s(j\omega) \rightarrow h_s[n]$

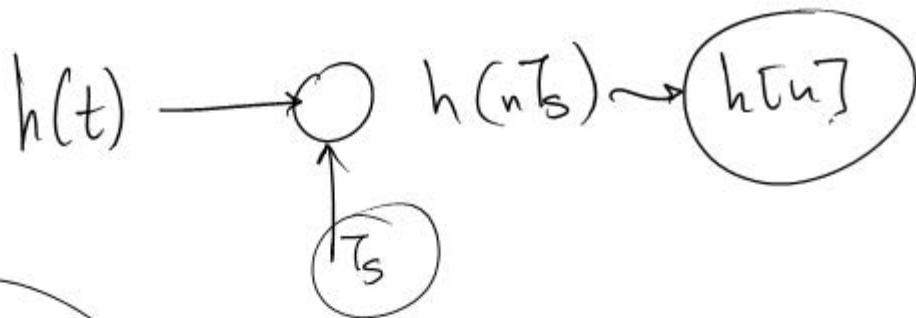


$h_s[n] \rightarrow H(e^{j\omega})$



$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

$\omega_s = \omega_s \cdot T_s \Rightarrow \omega_s = 2\pi$



$H(j\omega)$ (circled)

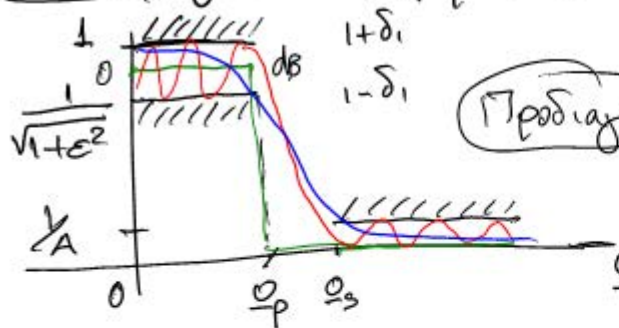
$\rightsquigarrow H(\sigma + j\omega) = H(s)$
 $s = \sigma + j\omega$

$H(e^{j\omega})$

$\rightsquigarrow \underline{H(z)}$

$z = r \cdot e^{j\omega}$ (circled)

Αναλογικά Φίλτρα



ω_p : pass-band

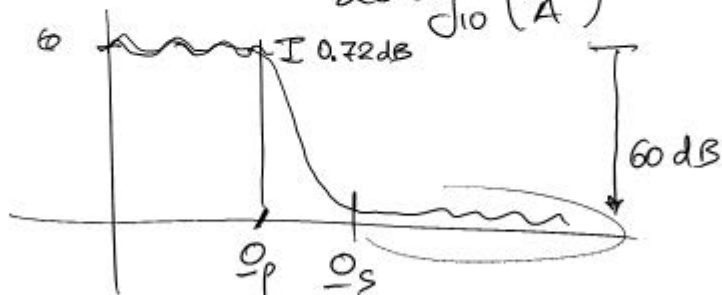
ω_s : stop-band

(Προδιαγραφή)

$$\delta_1 = 0.01 \Rightarrow 20 \log_{10}(1 + \delta_1) = 20 \log_{10}(1.01) = 0.086 \text{ dB}$$

$$A = 10^3 \Rightarrow \frac{1}{A} = 0.001 \quad (\delta_2 = 0.001)$$

$$20 \log_{10}\left(\frac{1}{A}\right) = -60 \text{ dB}$$



$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

(70dB)

$$20 \log_{10}|Y(e^{j\omega})| = 20 \log_{10}|H(e^{j\omega})| + 20 \log_{10}|X(e^{j\omega})|$$

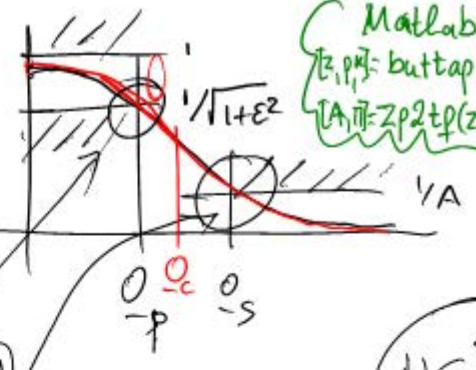
0.086 dB

Butterworth All-pole

$j\omega$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

Matlab
 $[z,p] = \text{buttap}(N)$
 $[A,\tau] = \text{zp2tf}(z,p,k)$



? \rightarrow Ταμ. ζωο
 είστρω

$$|H(j\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \quad (1)$$

$$|H(j\omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2} \quad (2)$$

? $\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)$ \rightarrow cut-off frequency

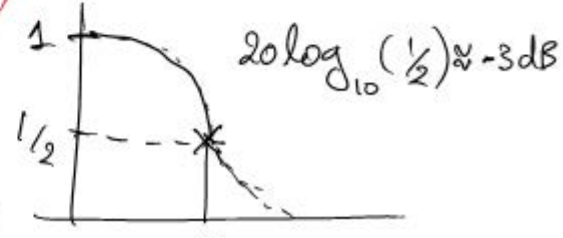
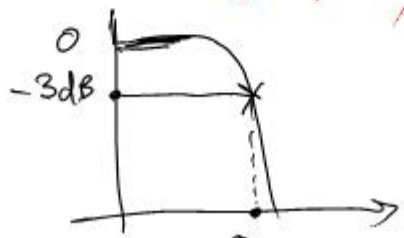
$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} \quad (N \in \mathbb{Z})$$

$\leftarrow \epsilon R$

Am. παραδ. εR
 $N = 5.36 \rightarrow N = 6$

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_s}$$

$$k_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$$



Logarithmic ω_c Flatness ω_c k sifaka

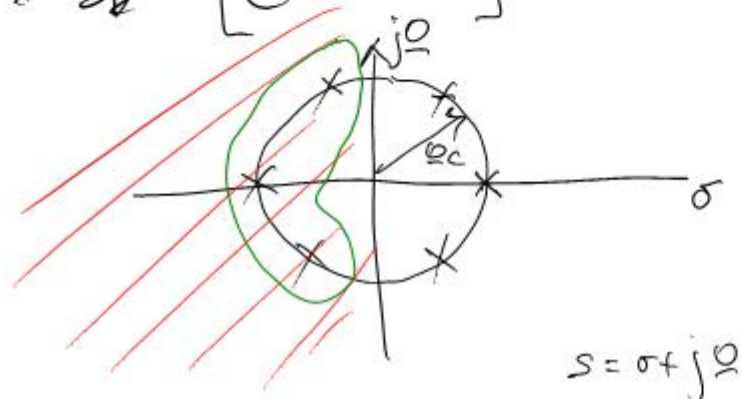
$$|H(j\omega)|^2 \approx H(s)H(-s)$$

$$\Rightarrow H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$1 + \left(\frac{s_k}{j\omega_c}\right)^{2N} = 0 \Rightarrow \left(\frac{s_k}{j\omega_c}\right)^{2N} = -1 \Rightarrow s_k = (-1)^{1/2N} \cdot j\omega_c \Rightarrow$$

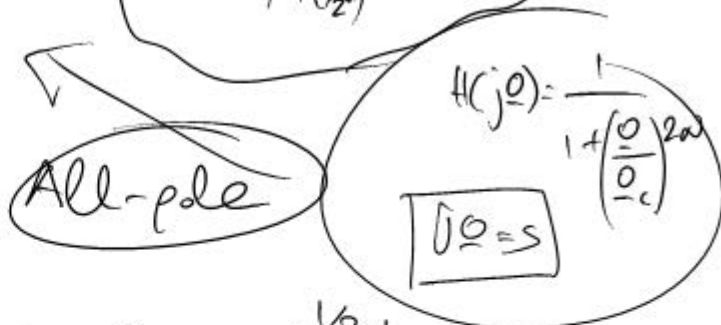
$$\Rightarrow s_k = \left[e^{j\pi(2k+1)} \right]^{1/2N} \cdot e^{j\pi/2} \cdot \omega_c \Rightarrow s_k = e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+1)} \cdot \omega_c$$

$$k = 0, 1, \dots, 2N-1$$



$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})$$

$$C(z) = H(z) \cdot H^*(1/z^*)$$



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

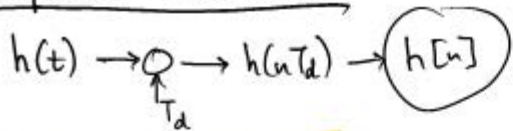
$$e^{j\frac{\pi}{2N}}$$

$$N=3$$

$2N$ poles

$$\frac{\pi}{N} = \frac{180}{3} = 60^\circ$$

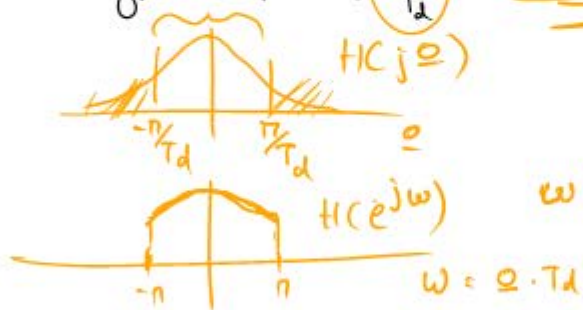
Impulse Invariance



$$h[n] = T_d \cdot h(nT_d) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j(\frac{\omega}{T_d} - \frac{2\pi k}{T_d}))$$

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \omega = 0 T_d \\ t &\rightarrow n \end{aligned}$$

Av $H(j0) = 0$ ja $|\omega| \geq \frac{\pi}{T_d} \Rightarrow$ Bandlimited



$$\Delta_{\omega}: H(e^{j\omega}) = H(j0) = H(j \frac{\omega}{T_d})$$

ja $|\omega| \leq \pi$

Προδιαγραφή των φίτρων

▷ $\left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\omega}{T_d} \end{array} \right]$ Ξαναφέρει από πηδ. στο φίτρο διαφορά χρόνου

$$\triangleright H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \xrightarrow{L^{-1}} h(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{s_k t} u(t)$$

Impulse
Invariance
Μεθοδολογία

▷ Διακριτοποίηση στο $h(t)$

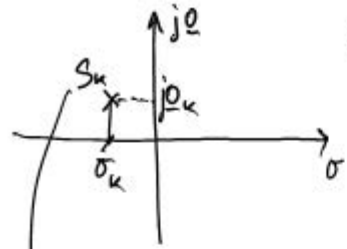
$$\begin{aligned} h[n] &= T_d \cdot h(nT_d) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot T_d \cdot e^{s_k n T_d} u(nT_d) \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \cdot T_d \cdot \left(e^{s_k T_d} \right)^n u[n] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^n u[n] \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

▷ Μετασχ. Z $H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$

$$\frac{1}{s - s_k} \xrightarrow[\text{Αντιστοίχιση}]{s \rightarrow z} \frac{1}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

$$s_k \rightarrow e^{s_k T_d}$$



$$s_k = \sigma_k + j\omega_k$$

$$-k T_d = \omega_k$$

$$z_k = e^{s_k T_d} = e^{\sigma_k T_d} \cdot e^{j\omega_k T_d} = e^{\sigma_k T_d} \cdot e^{j\omega_k}$$

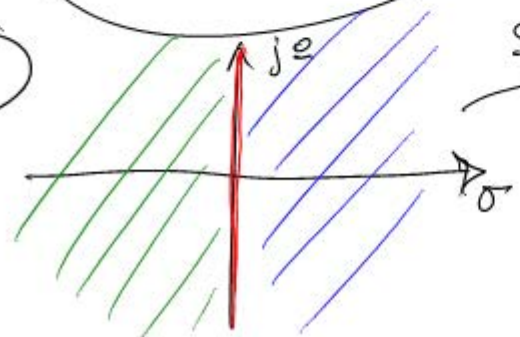
$$|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}|$$

$T_d > 0$

- A_v
- $\sigma_k < 0 \Rightarrow |z_k| < 1$
 - $\sigma_k = 0 \Rightarrow |z_k| = 1$
 - $\sigma_k > 0 \Rightarrow |z_k| > 1$

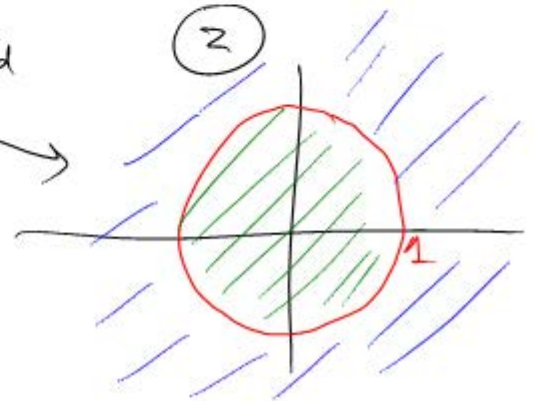
Impulse Invariance

(S)



$$s = e^{ST_d}$$

(z)



Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 19η: Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy370>