



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

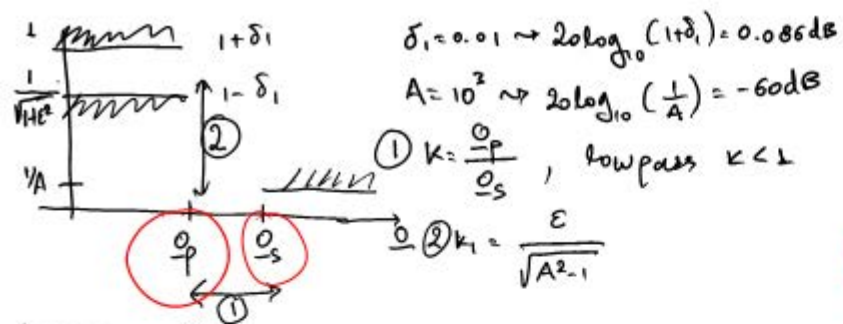
Διάλεξη 20η: Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 370

Ιξεδιδουσι φιλτρων.



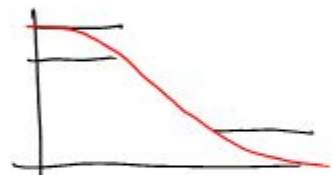
Transition rate

$[N, \omega_c] = \text{buttord}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s, 's')$

Butterworth

$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)}$$



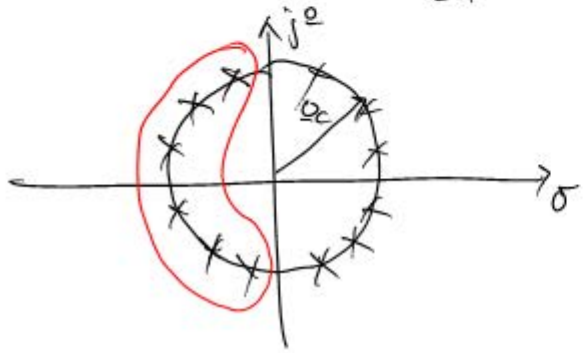
$$H_c(s) = \frac{c}{D_N(s)} = \frac{\omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

$$s_k = \omega_c \cdot e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}$$

$k = 0, 1, \dots, 2N-1$

$N = 3.281 \rightarrow$

$N = 4$



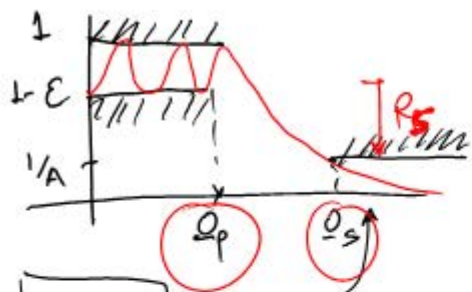
$\frac{1}{N} \times k \quad s \rightarrow z$

$$\frac{1}{s - s_k} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

$s_k \rightarrow e^{s_k T_d}$

Invar
Impulse

Chebyshev Type I



$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

$$T_N(\Omega) = \begin{cases} \cos(N \cdot \cos^{-1} \Omega) & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(N \cdot \cosh^{-1} \Omega) & |\Omega| > 1 \end{cases}$$

$$\Omega = \Omega_s$$

$$|H_c(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega_s/\Omega_c)} = \frac{1}{A^2} \Rightarrow N = \frac{\cosh^{-1}(1/\epsilon_r)}{\cosh^{-1}(1/\epsilon)}$$

$$N = 2.6051 \Rightarrow N = 3$$

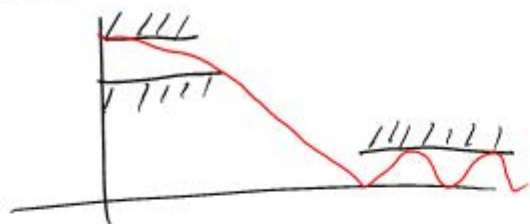
Ripple

$$\rightarrow [z, p, k] = \text{cheb2 ap}(N, R_p)$$

$$\rightarrow [N, w_c] = \text{cheb2 ord}(w_p, w_s, R_p, R_s, (s'));$$

$s = \sigma + j\omega$

Chebyshev Type II



$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right) \right]^{-1}}$$

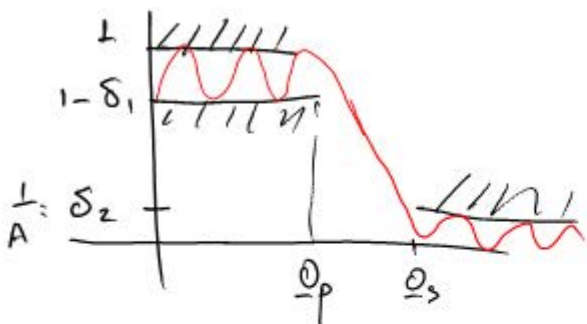
N : $\delta_{10\%}$ ripple

cheb2ord

$$[Z, P, k] = \text{cheb2ap}(N, R_s)$$

\uparrow ripple on stopband.

Elliptic filters



$$N = \frac{2 \log_{10}(4/k_1)}{\log_{10}(1/P)}$$

$$P = P_0 + 2(P_0)^5 + 15(P_0)^9 + 150(P_0)^{13}$$

$$\text{or } P_0 = \frac{1 - \sqrt{k'}}{2(1 + \sqrt{k'})}, \quad \text{or } k = \sqrt{1 - k'^2}$$

$$\begin{cases} [N, \omega_c] = \text{ellipord}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s, 's'); \\ [Z, p, k] = \text{ellipap}(N, R_p, R_s); \end{cases}$$

$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\omega/\omega_c)}$$

$U_N(\omega/\omega_c)$ Jacobian
Elliptic
function

$$N = 2.23 \Rightarrow$$

$$N = 3$$

$$[z, p, k] \rightarrow [\text{num}, \text{den}] = \text{zptzpf}(z, p, k)$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ [b_0, b_1, b_2, \dots, b_m] & & [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] \end{array}$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \xrightarrow{z^{-1}} h[n]$$

(X)

$$Y = \text{filter}([b_0, b_1, b_2, \dots, b_m], [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n], X)$$

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

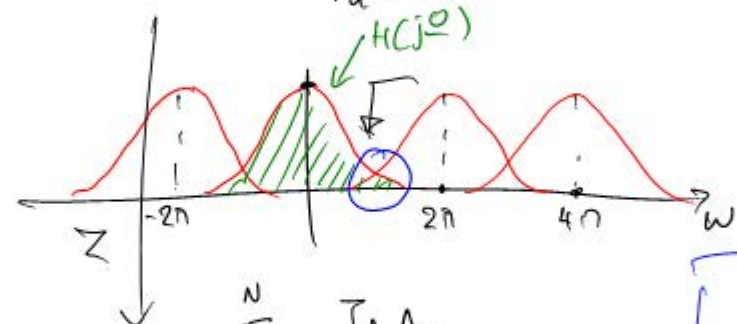
Impulse invariance.

$$h(t) \rightarrow h(nT_d) \rightarrow h[n] = T_d \cdot h(nT_d)$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ HC(j\omega) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} HC(j(\frac{\omega}{T_d} - \frac{2\pi k}{T}))$$

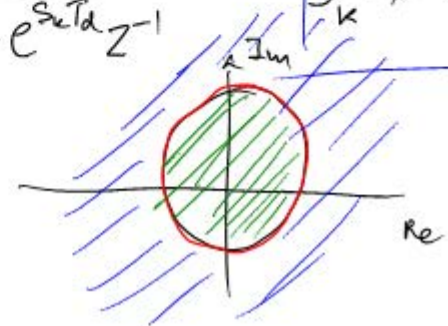
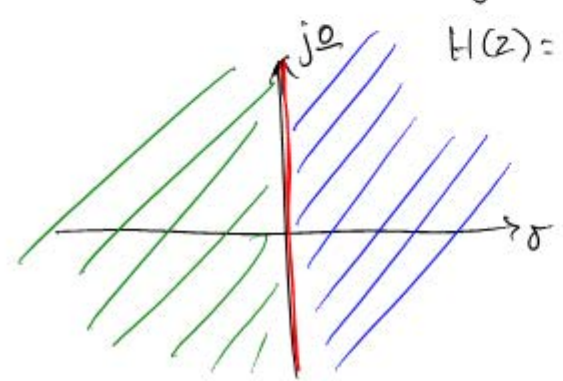
$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$



$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

$$s_k \rightarrow e^{s_k T_d}$$



$$H(s) = \frac{1}{s+5} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - e^{-T_d} z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-1} z^{-1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{s_k \rightarrow e^{s_k T_d}}$$

$s_k + 1 = 0 \Rightarrow s_k = -1$

$$T_d = 1$$

$$\Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{e}\right)^n u[n] \Rightarrow y[n] = \left(\frac{1}{e}\right)^n y[n-1] + x[n]$$

$$H(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \right) \rightsquigarrow H(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-1} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-3} z^{-1}} \right) \quad [T_d=1]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-3} z^{-1} + 1 - e^{-1} z^{-1}}{(1 - e^{-1} z^{-1})(1 - e^{-3} z^{-1})} = \frac{1 - e^{-2} \cosh(1) z^{-1}}{(1 - e^{-1} z^{-1})(1 - e^{-3} z^{-1})}$$

$$\rightarrow H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$\boxed{\text{pole } s = -2 \rightsquigarrow e^{-2}}$$

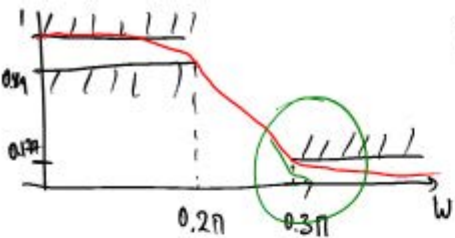
$$\text{poles } s = -1, -3 \rightsquigarrow e^{-1}, e^{-3}$$

$$\boxed{s_k \rightsquigarrow e^{s_k}} \text{ poles } \underline{\text{have}}$$

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 \quad 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| < 0.17783 \quad 0.3\pi < \omega < \pi$$

$$\triangleright \underline{\omega} = \frac{\omega}{T_d}, \quad T_d = 1 \Rightarrow \underline{\omega} = \omega$$



Butterworth: $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}}$

$$\underline{\omega} = 0.2\pi: |H(j0.2\pi)| \geq 0.89125$$

$$\underline{\omega} = 0.3\pi: |H(j0.3\pi)| \leq 0.17783$$

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{0.2\pi}{\omega_c}\right)^{2N} &= \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2 & (1) \\ \left(1 + \frac{0.3\pi}{\omega_c}\right)^{2N} &= \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2 & (2) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow N = 5.8858$$

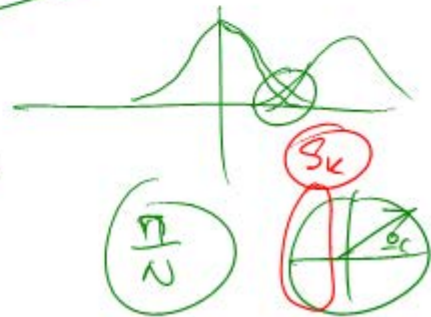
$$\rightarrow \boxed{N = 6}$$

$$\omega_c = 0.70474$$

$$\left(1 + \frac{0.2\pi}{\omega_c}\right)^{2 \times 6} = \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2 \Rightarrow \underline{\omega_c} = 0.7032$$

$$|H(j0.2\pi)| = 0.891243 \quad \checkmark$$

$$|H(j0.3\pi)| = 0.170011 \quad \checkmark\checkmark\checkmark$$



Bilinear Transformation

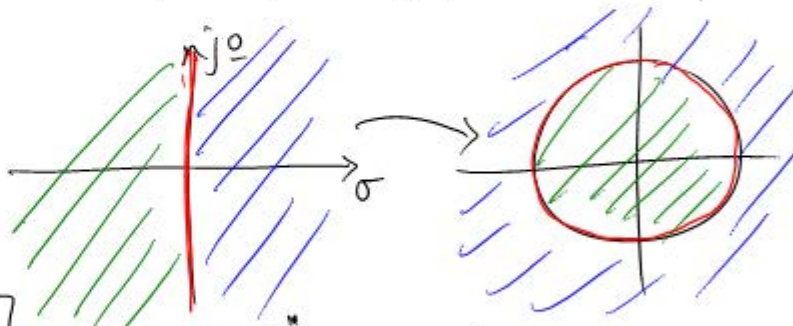
$\omega = \frac{\omega_c}{T_d}$ Sampling frequency
 Impulse Invariance
 $s_c \rightarrow e^{s_c T_d}$

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \Rightarrow z = \frac{1 + \frac{T_d}{2}s}{1 - \frac{T_d}{2}s} \Rightarrow z = \frac{1 + \sigma T_d/2 + j\omega_c T_d/2}{1 - \sigma T_d/2 - j\omega_c T_d/2}$$

$$H(s) \rightarrow H(z) = H \left(\frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right)$$

$(s = \sigma + j\omega_c)$

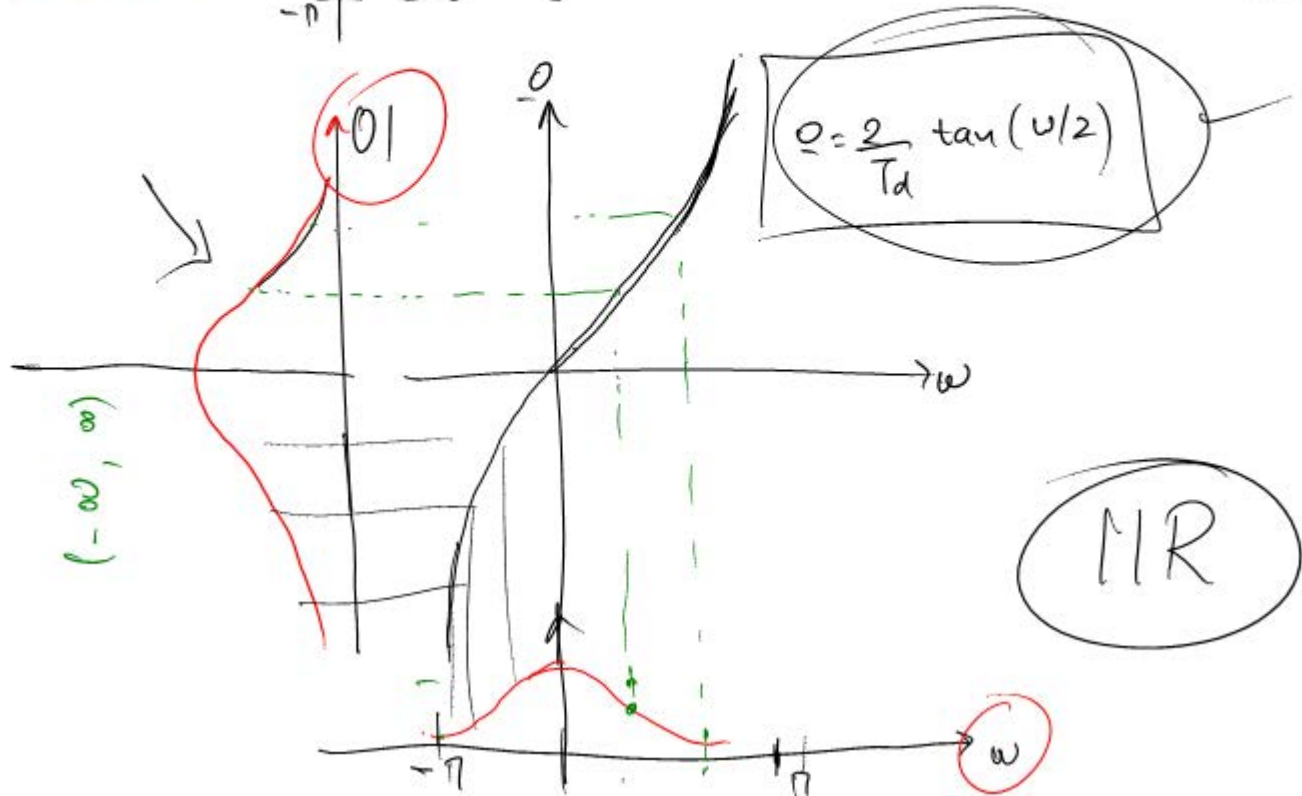
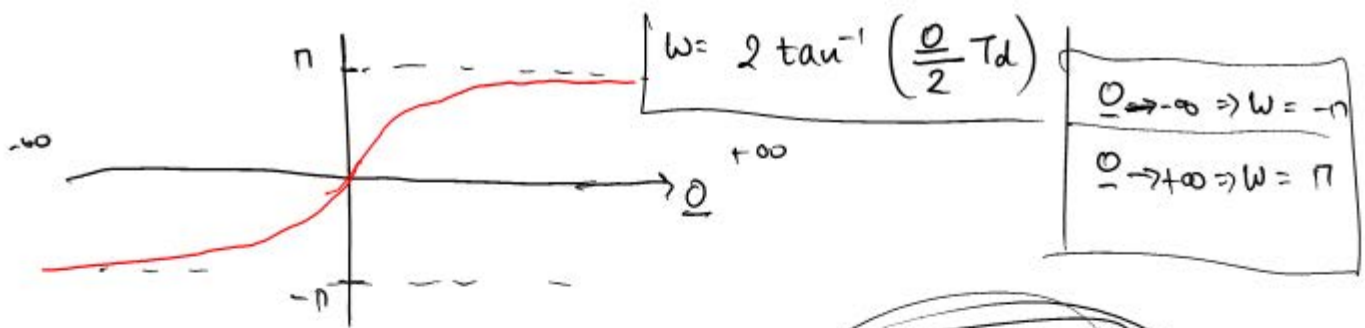
- $\Rightarrow \sigma > 0 \Rightarrow |z| > 1$
- $\sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1$
- $\sigma = 0 \Rightarrow |z| = 1$



$$s = \sigma + j\omega_c = \frac{2}{T_d} \left[\frac{1 - e^{-j\omega_c T_d}}{1 + e^{-j\omega_c T_d}} \right] \Rightarrow j\omega_c = \frac{2j}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_c T_d}{2}\right) \Rightarrow$$

$(r=1)$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_c T_d}{2}\right) \Rightarrow \omega_c = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{2} \cdot T_d\right)$$



Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 20η: Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy370>