ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διάλεξη 22η: Τυχαίες Διαδικασίες Διακριτού Χρόνου

Ιωάννης Στυλιανού
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 370

$\varphi_{xy}[k] = \sum_n x[n]\, y[n-k]$ Ετεροσυσχέτιση.

$x[n]$, $y[n]$

→ Διαφασματική πυκνότητα ενέργειας

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = F\{\varphi_{xy}[k]\} = \sum_k \sum_n x[n]\, y[n-k] \cdot e^{-j\omega k} =$$

$$= \sum_n x[n] \sum_k y[n-k]\, e^{-j\omega k} = \sum_n x[n] \sum_{n'} y[n']\, e^{-j\omega n} \cdot e^{j\omega n'} =$$

$n' = n-k \Rightarrow k = n-n'$

$$= \underbrace{\sum_n x[n]\, e^{-j\omega n}}_{X(e^{j\omega})} \underbrace{\sum_{n'} y[n']\, e^{j\omega n'}}_{Y(e^{-j\omega}) = Y^*(e^{j\omega})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{xy}[m] \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \cdot Y^*(e^{j\omega})$$

$$\varphi_{xy}[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})\, Y^*(e^{j\omega})$$

$$\varphi_x[n] \xleftrightarrow{F} |X(e^{j\omega})|^2$$

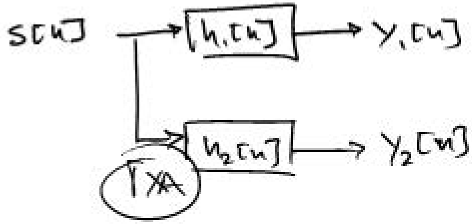
$$\varphi_{xy}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot Y^*(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$\varphi_x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$\varphi_x[n] = \sum_k x[k]\, x[k-n] \Rightarrow \varphi_x[0] = \sum_k (x[k])^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_k x^2[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\, d\omega}$$

Parseval.



$$h_1[n] = a_1 \cdot \delta[n-n_1]$$

$$h_2[n] = a_2\, \delta[n-n_2]$$

$$\varphi_{xy}[n] \longleftrightarrow \Phi_{xy}(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot Y^*(e^{jw})$$

$$H_1(e^{jw}) = a_1 \cdot e^{-jwn_1}$$

$$H_2(e^{jw}) = a_2 \cdot e^{jwn_2}$$

$$y_1[n] * h_2[n] = (s[n] * h_1[n]) * h_2[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1[n] * h_2[n] = \underbrace{(s[n] * h_2[n])}_{y_2[n]} * h_1[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1[n] * h_2[n] = y_2[n] * h_1[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1[n] * h_2[n] - y_2[n] * h_1[n] = 0}$$

$$\varphi_{y_1 y_2}[n] \longleftrightarrow \Phi_{y_1, y_2}(e^{jw}) = Y_1(e^{jw})\, Y_2^*(e^{jw})$$

$$Y_1(e^{jw}) = S(e^{jw}) \cdot H_1(e^{jw})$$

$$Y_2(e^{jw}) = S(e^{jw}) \cdot H_2(e^{jw})$$

$$\Rightarrow \quad A = a_1 a_2$$

$$n_{12} = n_1 - n_2$$

$$\Rightarrow \Phi_{y_1 y_2}(e^{jw}) = H_1(e^{jw}) \cdot H_2^*(e^{jw}) \cdot |S(e^{jw})|^2 =$$

$$= A \cdot |S(e^{jw})|^2 \cdot e^{-jw(n_{12})} \xrightarrow{F^{-1}} \varphi_{xy_2}[n] = \delta[n-n_{12}]$$

Τμ. X, συν. πυκν. πιθαν. $p_X(a)$ (pdf)

- μέση τιμή: $m_x = \mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a\, p_x(a)\, da$ ←

- μέση τετραγ. τιμή: $E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 p_x(a)\, da$

- μεταβλητότητα (variance): $\sigma_x^2 = E[(X-m_x)^2] =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (a-m_x)^2 p_x(a)\, da$$

$$\sigma_x^2 = E[(x-m_x)^2] = E\{x^2 - 2x m_x + m_x^2\} =$$

$$= E\{x^2\} - 2E\{x \cdot m_x\} + \underbrace{E\{m_x^2\}}_{m_x^2}$$

$$2 \cdot E\{x\} \cdot m_x$$

$$2 \cdot m_x \cdot m_x$$

$$= E\{x^2\} - m_x^2$$

- Ομοιόμορφη $p_x(a) = \begin{cases} \frac{1}{c-b}, & b \le a \le c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

- Gaussian $p_x(a) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$

joint pdf: $p_{XY}(a,\beta)$

Ετεροσυσχέτιση: $\varphi_{xy} = E\{X\cdot Y\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a\cdot\beta\cdot p_{xy}(a,\beta)\,da\,d\beta$

Συνδιασπορά: $\gamma_{xy} = E\{[x-m_x][y-m_y]\} =$

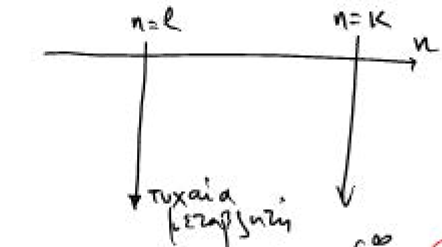
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (a-m_x)(\beta-m_y)\cdot p_{xy}(a,\beta)\,da,\,d\beta =$$

$$= \varphi_{xy} - m_x m_y$$

- $\varphi_{xy} = E\{X\cdot Y\} = E\{X\}\cdot E\{Y\}$ Ασυσχέτιστες

- $p_{x,y}(a,\beta) = p_x(a)\cdot p_y(\beta)$ Ανεξάρτητες

Στοχαστική διαδικασία



$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$

A κατ. ομοιομ. $0 \le a \le 4$

φ κατ. ομοιομ. $0 \le \varphi < 2\pi$

$$m_{x[n]} = E\{x[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} a\, p_{x[n]}(a;n)\, da$$

$$E\{x^2[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 p_{x[n]}(a;n)\, da$$

$$\sigma^2_{x[n]} = E\{x^2[n]\} - m^2_{x[n]}$$

$$\varphi_{xx}[l,k] = E\{x[l]\,x[k]\}$$

$$\gamma_{xx}[l,k] = E\{(x[l]-m_l)(x[k]-m_k)\} =$$

$$= \varphi_{xx}[l,k] - m_l \cdot m_k$$

Στάσιμη διαδικασία με την ευρεία έννοια (WSS)

- 1ης τάξης : $m_x = E\{x[n]\} \quad \forall n$

- 2ης τάξης : $\varphi_{xx}[l] = \varphi_{xx}[n+l, n] \quad \forall n, l$

$$\gamma_{xx}[l] = \gamma_{xx}[n+l, n] = \varphi_{xx}(l) - m_x^2$$

$$E\{x^2[n]\} = \varphi_{xx}[0]$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0]$$

Ετεροσυσχέτιση : $\varphi_{xy}[l] = E\{x[n+l], y[n]\}$

Συνδιασπορά : $\gamma_{xy}[l] = E\{(x[n+l] - m_x)(y[n] - m_y)\}$

$$= \varphi_{xy}[l] - m_x m_y$$

$$P_x = E\{x^2[n]\} = \varphi_{xx}[0] = \sigma_x^2 + m_x^2$$

Εργοδικό

$$M+1 \rightsquigarrow x[n]$$

$$m_x = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x[n]$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^{M} x[n]$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \cdot \sum_{n=-M}^{M} \left(x[n]-m_x\right)^2$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^{M} \left(x[n]-\hat{m}_x\right)^2$$

$$\gamma_{xx}[\ell] = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} \left(x[n]-m_x\right)\left(x[n+\ell]-m_x\right)$$

$$\hat{\gamma}_{xx}[\ell] = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^{M} \left(x[n]-\hat{m}_x\right)\left(x[n+\ell]-\hat{m}_x\right)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

τ.δ. Γ.Χ.Α.

μέση τιμή του $x[n]$: $E\{x[n]\} = m_x[n]$

$y[n]$: $E\{y[n]\} = m_y[n]$

$$m_y[n] = E\{y[n]\} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot \underbrace{E\{x[n-k]\}}_{m_x[n]} = m_x[n] \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} \Rightarrow H(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow m_y[n] = H(e^{j0}) \cdot m_x[n],$$ Αν είναι ανεξ. η

$$m_y = H(e^{j0}) \cdot m_x$$

$$\varphi_{yy}[n, n+m] = E\left\{ y[n] \cdot y[n+m] \right\} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]\, x[n+m-r] \right\}$$

$$= E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k] h[r] \cdot x[n-k] \cdot x[n+m-r] \right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot h[r] \cdot \underbrace{E\left\{ x[\overbrace{n-k}^{n-k=n'}] \cdot x[n+m-r] \right\}}_{\varphi_{xx}[m+k-r]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{yy}[n, n+m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k] h[r] \cdot \varphi_{xx}[m+\underbrace{k-r}_{-\ell}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{yy}[n, n+m] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}[m-\ell] \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot h[k+\ell]}_{\mathring{\varphi}_{hh}[\ell]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{yy}[n, n+m] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathring{\varphi}_{hh}[\ell] \cdot \varphi_{xx}[m-\ell] = \mathring{\varphi}_{hh}[m] * \varphi_{xx}[m]$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{yy}(e^{j\omega}) &= \mathring{\Phi}_{hh}(e^{j\omega}) \cdot \Phi_{xx}(e^{j\omega}) \\ \mathring{\Phi}_{hh}(e^{j\omega}) &= |H(e^{j\omega})|^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \cdot \Phi_{xx}(e^{j\omega})$$

$$\varphi_{yy}[m] \longleftrightarrow \Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \cdot \Phi_{xx}(e^{j\omega})$$

$$\varphi_{xy}[m] = E\left\{ x[n] \cdot y[n+m] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, \varphi_{xx}[m-k]$$

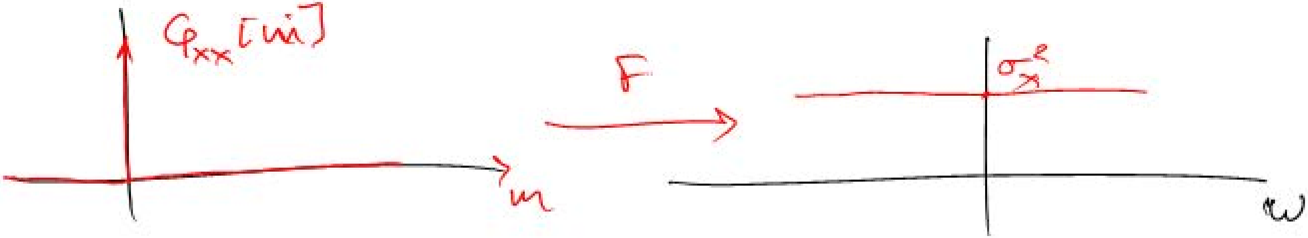
$$\Rightarrow \varphi_{xy}[m] \longrightarrow \Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot \Phi_{xx}(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{xy}(e^{j\omega})}{\Phi_{xx}(e^{j\omega})}}$$

ανάκτηση συστήματος

$$\underbrace{x[n] \quad \text{λευκός θόρυβος} \quad \sigma_x^2}$$

$$\varphi_{xx}[m] = \sigma_x^2\,\delta[m] \rightsquigarrow \Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2$$



$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\varphi_{xy}[m] = \sigma_x^2\, h[m] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \cdot H(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} = \frac{\Phi_{xy}(e^{j\omega})}{\sigma_x^2} \xrightarrow{F^{-1}} h[n]$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος. Διάλεξη 22η: Τυχαίες Διαδικασίες Διακριτού Χρόνου». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://www.csd.uoc.gr/~hy370