



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Ασκήσεις 2: Ολοκλήρωση μιγαδικής συνάρτησης
Μαρία Καφεσάκη
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

ΤΕΤΥ - ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ασκήσεις 2 : Ολοκλήρωση μιγαδικής συνάρτησης

1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων $f_1(z) = 1/z$ και $f_2(z) = z^2 - 1$, με δρόμο ολοκλήρωσης τον κύκλο κέντρου μηδέν και ακτίνας R .
2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z) = y = \text{Im}z$ όταν ο δρόμος ολοκλήρωσης είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με κορυφές στα σημεία $(-2, 1)$, $(2, 1)$, $(2, -1)$ και $(-2, -1)$.
3. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

αποδείξτε ότι

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

όπου $f(z)$ αναλυτική μέσα και πάνω στην περιοχή ολοκλήρωσης και z_0 εσωτερικό του δρόμου c .

4. Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους της Σειράς Taylor της συνάρτησης e^z , γύρω από το μηδέν και γύρω από το 1, και τους τρεις πρώτους όρους της Σειράς Taylor της συνάρτησης $\sin z$ γύρω από το μηδέν.
5. Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους της Σειράς Laurent της συνάρτησης e^z/z^2 , γύρω από το μηδέν, και της $e^z/(z-1)$ γύρω από το 1.
6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(z) = 1/(z + z^2)$, με δρόμο ολοκλήρωσης κύκλο κέντρου μηδέν και ακτίνας 3.
7. Υπολογίστε, με χρήση μιγαδικής ολοκλήρωσης, τα εξής ολοκληρώματα :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{\cos(\theta)} d\theta, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 1} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 - 1} dx.$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Μαρία Καφεσάκη. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Ασκήσεις 2: Ολοκλήρωση μιγαδικής συνάρτησης». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr/courses/course/view.php?id=337>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

