



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

---

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

**Ασκήσεις 3: Διανυσματικοί χώροι - Πίνακες - Ορίζουσες**  
Μαρία Καφεσάκη  
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

---

## ΤΕΤΥ - ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### Ασκήσεις 3 : Διανυσματικοί χώροι - Πίνακες - Ορίζουσες

1. Δίνονται τα διανύσματα

$|f_1\rangle = \xi|e_1\rangle + |e_2\rangle$ ,  $|f_2\rangle = |e_1\rangle + \xi|e_2\rangle + |e_3\rangle$ ,  $|f_3\rangle = |e_2\rangle + \xi|e_3\rangle$ ,  
όπου  $|e_1\rangle$ ,  $|e_2\rangle$ ,  $|e_3\rangle$  ορθοκανονικά και  $\xi$  πραγματικός αριθμός. Για ποιες τιμές  
του  $\xi$  τα  $|f_1\rangle$ ,  $|f_2\rangle$ ,  $|f_3\rangle$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα; Για ποιες είναι γραμμικά  
εξαρτημένα;

2. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ , όπου

$$\mathbf{a}_1 = 3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}, \quad \mathbf{a}_2 = 2\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}.$$

3. Αποτελούν τα παρακάτω διανύσματα ορθοκανονικό σύστημα;

$$|e_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + i|e_2\rangle), \quad |e_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - i|e_2\rangle), \quad |e_0\rangle = |e_3\rangle$$

( $|e_1\rangle$ ,  $|e_2\rangle$ ,  $|e_3\rangle$  ορθοκανονικά). Υπόδειξη: Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο  
τους ανά δύο και το μέτρο τους. Μην ξεχνάτε ότι πρόκειται για διανύσματα με  
μιγαδικές συνιστώσες.

4. Δίνονται οι πίνακες

$$(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε τα εξής:

i)  $2(a) + (b)$ , ii)  $(a)(b)$ , iii)  $(b)(a)$ , iv)  $(a)(c)$ , v)  $(c)(a)$  (υπολογίζεται;)

5. Για τον πίνακα  $(a)$  της προηγούμενης άσκησης, γράψτε τους εξής πίνακες:

i) συζυγή,  $(a^*)$ , ii) ανάστροφο,  $(a)^T$ , iii) ερμιτιανό συζυγή ή προσαρτημένο,  
 $(a)^+$ .

6. Αλλάξτε τα στοιχεία που βρίσκονται στο κάτω τριγωνικό τμήμα του πίνακα  $(a)$  της  
άσκησης 4, ώστε ο  $(a)$  να γίνει

i) συμμετρικός, ii) ερμιτιανός, iii) τριγωνικός άνω.

7. Για τον πίνακα  $(b)$  της άσκησης 4 υπολογίστε

i) το ίχνος, ii) την ορίζουσα, iii) τον αντίστροφο.

8. Δίνεται ο πίνακας  $(a)$  και το διάνυσμα (πίνακας στήλης)  $\bar{b} \equiv |b\rangle$ , όπου

$$(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Εξετάστε αν ο  $(a)$  είναι (i) κανονικός, (ii) ορθογώνιος (μοναδιακός πραγματικός).  
Υπολογίστε το μέτρο του  $\bar{b}$ , καθώς και το μέτρο του  $(a)\bar{b}$ . Τι παρατηρείτε;

Παράδοση: 18/5/2005

## Σημειώματα

### Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Μαρία Καφεσάκη. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Ασκήσεις 3: Διανυσματικοί χώροι - Πίνακες - Ορίζουσες». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr/courses/course/view.php?id=337>

### Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

### Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

