

Θέματα Αλγέβρας, Αριθμητική Γεωμετρία
Χειμερινό 2014
Φυλλάδιο 1
Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Να αποδείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση

$$x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$$

δεν έχει, μη-τετριμμένες, λύσεις.

2. Προσπαθήστε να λύσετε την διοφαντική εξίσωση

$$x^2 + y^2 = z^2$$

με μεθόδους της στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών

3. Θεωρείστε τη λύση $x_0 \equiv 4 \pmod{7}$ της ισοτιμίας $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$ και υπολογίστε τους επόμενους τρεις όρους της ακολουθίας των λύσεων $(\pmod{7^n})$ για $n = 2, 3, 4$.

4. Ελέγξτε αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύσεις και σε καταφατική απάντηση, υπολογίστε τις πρώτες τρεις θέσεις της λύσης.

$$x^2 = 7 \text{ στον } \mathbb{Z}_3$$

$$x^2 = 17 \text{ στον } \mathbb{Z}_{5003}$$

$$x^2 = -1 \text{ στον } \mathbb{Z}_2.$$

5. Να αποδείξετε ότι στο σώμα \mathbb{Q}_p όπου p πρώτος αριθμός, ισχύει:

$$-1 = \sum_0^{\infty} (p-1)p^i.$$