

Θέματα Αλγέβρας, Αριθμητική Γεωμετρία

Χειμερινό 2014

Φυλλάδιο 2ο

Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Να υπολογίσετε τις τιμές $w_p(x)$ και $|x|_p$ όταν $x = 35, \frac{56}{12}, 177553, \frac{3}{686}$ και $p = 7, 5, 3$.
2. Αφού διαπιστώσετε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{8}$ είναι ακέραιοι 5-αδικοί, να υπολογίσετε τις πέντε πρώτες θέσεις της δυναμοσειράς τους στο 5-αδικό σώμα. Τί παρατηρείτε;
3. Να αποδείξετε ότι για την p -Norm ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$|1|_p = 1, |-1|_p = 1, |-a|_p = |a|_p.$$

Αν $a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0$ να αποδείξετε ότι

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p = \frac{|a|_p}{|b|_p}.$$

Επίσης να αποδείξετε ότι

$$||a|_p - |b|_p| \leq |a - b|_p.$$

(Εξωτερικά αριστερά έχουμε απόλυτη τιμή.)

Τέλος να αποδείξετε ότι αν $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον προσθεταίοι a_i, a_j , τ.ω. να ισχύει $|a_i|_p = |a_j|_p$.

4. Έστω $c \in \mathbb{R}, 0 < c < 1$ και $p \in \mathbb{P}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_p(x) = c^{w(x)}$. Να αποδείξετε ότι η ϕ_p είναι μία p -Norm

5. Να αποδείξετε τις πέντε ιδιότητες της p -Norm, $|\cdot|_p$. (Δείτε παρακαλώ τις σημειώσεις του μαθήματος.)