

Θέματα Αλγέβρας, Αριθμητική Γεωμετρία
Χειμερινό 2014
Φυλλάδιο 2
Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Να αποδείξετε ότι στο σώμα $\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p$ ισχύει:

Αν $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του \mathbb{Q}_p και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει.

2. Αν $\{x_n\}$ μία ακολουθία ρητών, τότε αυτή είναι ακολουθία *Cauchy* ως προς την p -Norm, $|\cdot|_p$ τότε και μόνο τότε όταν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$$

3. Να υπολογίσετε την p -Norm και το p -αδικό ανάπτυγμα των αριθμών

1. 15, -1, -3 στο \mathbb{Q}_5
2. Το 6! στο \mathbb{Q}_3
3. Το $\frac{1}{3!}$ στο \mathbb{Q}_3 .

4. Να γράψετε το p -αδικό ανάπτυγμα των αριθμών $\frac{1}{p}$ και $\frac{1}{p^k}$ στο σώμα \mathbb{Q}_p .

5. Να υπολογίσετε το p -αδικό ανάπτυγμα του αριθμού $\frac{1}{2}$ στα σώματα $\mathbb{Q}_3, \mathbb{Q}_5$ και \mathbb{Q}_7 . Μπορείτε να γενικεύσετε το αποτέλεσμα για κάθε περιττό πρώτο p ;