

Θέματα Αλγέβρας, Αριθμητική Γεωμετρία
Χειμερινό 2014
Φυλλάδιο 7ο
Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Ο δακτύλιος R είναι, όπως πάντα, αντιμεταθετικός με μοναδιαίο. Ένα ιδεώδες αυτού I θα λέγεται πρωταρχικό όταν ισχύει: Αν $ab \in I$ τότε $a \in I$ είτε $b^n \in I$, για κάποιο φυσικό αριθμό n . Να αποδείξετε ότι αν I πρωταρχικό ιδεώδες του R τότε το $Rad(I)$ είναι πρώτο ιδεώδες αυτού.

2. Αν I, J ιδεώδη του R να αποδείξετε ότι

$$Rad(I \cap J) = Rad(I) \cap Rad(J).$$

3. Να υπολογιστεί η διακρίνουσα των πολυωνύμων, $f(X) = aX^2 + bX + c$ και $g(X) = X^3 + pX + q$.

4. Αν $F(X, Y, Z) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ ομογενές πολυώνυμο n -στού βαθμού, να αποδείξετε τον τύπο του *Euler*.

$$XF_X + YF_Y + ZF_Z = nF$$

5. Να υπολογίσετε τα ιδιάζοντα σημεία της αφινικής καμπύλης:

$$f(X, Y) = (1 + X^2)^2 - XY^2 \in \mathbb{C}[X, Y].$$

6. Να υπολογίσετε την πολλαπλότητα τομής των καμπυλών $f(X, Y) = X^5 + X^4 + Y^2$ και $g(X, Y) = X^6 - X^5 + Y^2$ στο σημείο $P = (0, 0)$.

Ηράκλειο, την 13η Νοεμβρίου του 2014