

Θέματα Αλγέβρας, Αριθμητική Γεωμετρία
Χειμερινό 2014
Φυλλάδιο 9ο
Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Να αποδείξετε ότι σε μία ελλειπτική καμπύλη E/\mathbb{Q} , το άθροισμα τριών συνευθειακών ρητών σημείων αυτής είναι ίσο με O , ακριβώς τότε όταν το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $E(\mathbb{Q})$, O είναι σημείο καμπής της καμπύλης.

2. Αν E/\mathbb{Q} ελλειπτική καμπύλη στη γενική μορφή του *Weierstrass* και $P = (x, y)$ ένα ρητό σημείο αυτής, να αποδείξετε ότι η πρώτη συντεταγμένη του σημείου $2P$ γράφεται:

$$x(2P) = \frac{x^4 - b_4x^2 - 2b_6x - b_8}{4x^3 + b_2x^2 + 2b_4x + b_6}.$$

(Τα b_2, b_4, b_6, b_8 έχουν οριστεί στο μάθημα.)

3. Αν E/\mathbb{Q} η ελλειπτική καμπύλη $Y^2 + Y = X^3 - X$ και $P = (0, 0)$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων $2P, 3P, 4P, 5P, 6P$

4. Αν E/\mathbb{Q} η ελλειπτική καμπύλη $Y^2 = X^3 + X^2 - 25X + 29$ και

$$P_1 = \left(\frac{61}{4}, \frac{-469}{8}\right), P_2 = \left(\frac{-335}{81}, \frac{-6868}{729}\right), P_3 = (21, 96),$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι \mathbb{Z} -γραμμικά εξαρτημένα και μάλιστα ότι $-3P_1 - 2P_2 + 6P_3 = O$

5. Έστω E/\mathbb{F}_p η ελλειπτική καμπύλη $Y^2 = X^3 + AX$. Υποθέτουμε $p \geq 7$ και $p \equiv 3 \pmod{4}$. Να αποδείξετε ότι η ομάδα $E(\mathbb{F}_p)$ έχει ακριβώς $p + 1$ στοιχεία.

6. Έστω E/\mathbb{Q} η ελλειπτική καμπύλη $Y^2 = X^3 + p^2X$ με $p \equiv 5 \pmod{8}$. Να αποδείξετε ότι η αβελιανή ομάδ $E(\mathbb{Q})$ έχει $\text{rank} = 0$.

Ηράκλειο, την 6η Δεκεμβρίου του 2014